

6.26 Satz:

- (a) Jede Matrix lässt sich durch eine Zeilentransformation auf Zeilenstufenform bringen.
- (b) Jede Matrix lässt sich durch Zeilen- und Spaltentransformationen auf Normalform bringen.

Konstruktiver Beweis: Gaußsches Eliminationsverfahren

Sei $A = (a_{ij})$ gegebene Matrix.

SCHRITT 1: Zeilenstufenform (mit Pivots = 1)

Falls $A = 0$: FERTIG.

Falls $A \neq 0$: Sei Spalte j die erste Spalte $\neq 0$.

Durch (VERTAUSCHEN) von Zeilen können wir erreichen: $\tilde{a}_{ij} \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{ij} & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \tilde{a}_{zi} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{mj} & * & \dots & * \end{array} \right) \quad \left| \tilde{a}_{ij}^{-1} \right.$$

Durch (SKALIEREN) von Zeile 1 mit $\tilde{a}_{ij}^{-1}$ können wir erreichen: $\tilde{\tilde{a}}_{ij} = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \tilde{a}_{zi} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{mj} & * & \dots & * \end{array} \right) \quad \left[\begin{array}{l} \cdot (-\tilde{a}_{zi}) \dots \\ \cdot (-\tilde{a}_{mj}) \end{array} \right]$$

(ADDIERE) für $i = 2, \dots, m$ das $-\tilde{a}_{ij}$ -fache von Zeile 1 zu Zeile i . Wir erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} * \cdots * \\ \hline A' \end{array} \right)$$

Wiederhole nun dieses Verfahren für A' .
Da A' weniger Spalten als A besitzt,
sind wir nach endlich vielen Iterationen
FERTIG.

SCHRITT 2: Zeilennormalform lässt sich nun durch
weitere Zeilentransformationen vom Typ (ADDIERE) erreichen.

— Das bewerkstelligt (a).

SCHRITT 3: Normalform

Durch (VERTAUSCHEN) von Spalten können wir
erreichen, dass Matrix folgende Gestalt hat:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & * & \cdots & * \\ \hline & 0 & & & \\ & 0 & & & \end{array} \right)$$

Durch (ADDIERE) von Spalten können wir
nun auf Normalform.

□

Beispiel: $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot 0 \\ \cdot (-3) \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} A'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot (-\frac{1}{2}) \end{array} \right\} - \text{Zeilenstufenform}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{(-1)} \\ \xrightarrow{(-1)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Normalform