

6.27 Rezept: Rang bestimmen

Sei Matrix A gegeben.

Überführe A durch Zeilentransformationen in eine Matrix A' in Zeilenstufenform. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}(A) &= \operatorname{rk}(A') \\ &= \text{Anzahl der Pivots von } A' \end{aligned}$$

Beweis:

Überführe A' durch weitere Transformationen in Matrix A'' in Normalform (siehe SCHRITTE 2 & 3 in 6.26).

Nach Korollar 6.22 ist

$$\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A') = \operatorname{rk}(A'').$$

Ferner haben A' und A'' dieselbe Anzahl r an Pivots. Und $\operatorname{rk}(A'')$ lässt sich leicht bestimmen:

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ e_1 & e_2, \dots, e_r \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(f_{A''}) &= \{e_1, \dots, e_r\}, \text{ also ist} \\ \operatorname{rk}(A'') &= \dim(\{e_1, \dots, e_r\}) = r. \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ hat ZSF } A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{s.o.})$$

Also ist $\operatorname{rk}(A) = 2$.