

6.28 Rezept: LGS lösen

Sei LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ gegeben.

SCHRITT 1:

Überführe erweiterte Matrix $(A|\underline{b})$
 durch Zeilentransformation in Matrix $(A'|\underline{b}')$,
 in der A' Zeilenstufenform hat
 (z.B. mit Verfahren aus 6.24).

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{cccc|c} \circ & \dots & \circ a_1 & * & * & b'_1 \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & a_2 \\ \vdots & & & & & \\ & & & \circ a_r & * & \dots & * & b'_r \\ \hline \circ & & & & & & \circ & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ \circ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \circ & b'_m \end{array} \right)$$

$a_i \neq 0$

Betrachte Zeilen $r+1, \dots, m$. Falls

$$\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} \neq \underline{0}, \text{ folgt } \mathcal{L}(A, \underline{b}) = \emptyset$$

FERTIG.

Falls $\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} = \underline{0}$, wirf Nullzeilen weg und fahre fort.

SCHRITT 2:

Überführe Matrix durch weitere Zeilentransformation in Matrix $(A'' | \underline{b}'')$ in Zeilennormalform. Nach Korollar 6,24 gilt

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \mathcal{L}(A'', \underline{b}'')$$

und das LGS $A'' \cdot \underline{x} = \underline{b}''$ ist so übersichtlich, dass man alle Lösungen „zu Fuß“ bestimmen kann.

Alternativ:

SCHRITT 3:

Markiere Spalten von A'' , in denen keine Pivots stehen. Ändere in diesen Spalten alle Vorzeichen.

SCHRITT 4:

Füge für jede markierte Spalte j eine neue Zeile der Form

$$(0 \dots 0 \underset{\uparrow \text{Spalte } j}{1} 0 \dots 0)$$

so in $(A'', \underline{b}'')$ ein, dass die neuen 1en zusammen mit den Pivots eine vollständige Diagonale von A'' bilden.

Die Matrix hat nun die Form:

The diagram illustrates the iterative steps of the Gauss-Jordan elimination algorithm. It shows a sequence of matrices being transformed. The first matrix has a pivot element '1' in the second row, second column, which is boxed in red. This pivot is used to eliminate other elements in the second column. The second matrix shows the result of this elimination, with the pivot element still boxed in red. The third matrix shows the next step, where the pivot element is used to eliminate other elements in the second column. The diagram continues with an ellipsis and then shows the final matrix, which is the identity matrix. The final matrix has '1's on the diagonal and '0's elsewhere. The diagram is labeled with $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_l$ and $\hat{b}$ at the bottom, indicating the input vector and the right-hand side of the system.

Die markierten Spalten $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_e$ bilden nun eine Basis von $\mathcal{L}(A)$ und die letzte Spalte ist eine Lösung des inhomogenen Systems.

$$\mathcal{L}(A) = \langle \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_e \rangle$$

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \underline{\tilde{b}} + \langle \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_e \rangle$$

Beispiel:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

SCHRITT 1: $(A|\underline{b})$ auf ZSF bringen

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

— ZSF

Einträge neben den Nullzeilen sind 0, also existieren Lösungen

Nullzeilen streichen:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

SCHRITT 2: ZNF

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{l} (-1) \\ (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & -1 & 0 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 8 \end{array} \right) \quad - \text{ZNF}$$

Alternative A:

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{x_1} + 2x_2 & -x_4 & + 8x_6 = -16 \\ \wedge & \textcircled{x_3} + 3x_4 & = 8 \\ \wedge & \textcircled{x_5} - 3x_6 & = 8 \end{array}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -2x_2 & +x_4 & -8x_6 \\ 8 & x_2 & -3x_4 & \\ 8 & & x_4 & 3x_6 \\ & & & x_6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Alternative B:

SCHRITT 3: Spalten ohne Pivots markieren & Vorzeichen ändern

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & -2 & 0 & +1 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & +3 & 8 \end{array} \right)$$

SCHRITT 4: Zeilen einfügen

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & -2 & 0 & +1 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & +3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{a}_3 \quad \tilde{b}$

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ sind Basis von $\mathcal{L}(A)$,

und

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \tilde{b} + \langle \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3 \rangle.$$

Beweis, dass Rezept 6.28 funktioniert:

Bis einschließlich Schritt 2 wissen wir aus

Korollar 6.24: $\mathcal{L}(A'', \underline{b}'') = \mathcal{L}(A, \underline{b})$.

Zu den Schritten 3 & 4:

Nummeriere, um Notation zu vereinfachen,
Variablen so um, dass Pivot-Elemente

links stehen:

$$(A'', \underline{b}'') = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & & & & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1l} & b_1 \\ & \boxed{1} & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \boxed{1} & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \boxed{1} & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & a_{r1} & \cdots & a_{rl} & b_r \end{array} \right)$$

Durch Schritte 3 & 4 erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & & & & 0 & -a_{11} & \cdots & -a_{1l} & b_1 \\ & \boxed{1} & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \boxed{1} & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \boxed{1} & & -a_{r1} & \cdots & -a_{rl} & b_r \\ 0 & & & & & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Algorithmus liefert also:

$$\tilde{\underline{g}}_i = \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i=1, \dots, l; \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \underline{e}_i \in K^l$

Zu zeigen:

- (a) $\tilde{\underline{g}}_i \in \mathcal{L}(A'')$
- (b) $\tilde{\underline{g}}_1, \dots, \tilde{\underline{g}}_l$ bilden Basis von $\mathcal{L}(A'')$
- (c) $\tilde{\underline{b}} \in \mathcal{L}(A'', \underline{b}'')$.

zu a:

$$\begin{aligned}
 A'' \cdot \tilde{g}_i &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\ell} \end{pmatrix} \cdot \underline{e}_i \\
 &= \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ri} \end{pmatrix} = \underline{0}
 \end{aligned}$$

zu b: $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_\ell$ sind linear unabhängig, da $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_\ell$ linear unabhängig sind.

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 \dim(\mathcal{L}(A'')) &= (r+\ell) - \text{rk}(A'') \\
 &= (r+\ell) - r \quad \text{Rezept 6.27} \\
 &= \ell
 \end{aligned}$$

Also bilden $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_\ell$ nach Basis Kriterium 5.13 eine Basis von $\mathcal{L}(A'')$.

zu c:

$$\begin{aligned}
 A'' \cdot \tilde{b} &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\ell} \end{pmatrix} \cdot \underline{0} \\
 &= \underline{b''}.
 \end{aligned}$$

□