## 6.29 Rezept: Matrix invertieren

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gegeben (also $A$ quadratisch). Überführe die Matrix

$$(A \mid \mathbb{1}_n)$$

durch Zeilentransformationen in eine Matrix

$$(A' \mid B'),$$

in der $A'$ Zeilennormalform besitzt.

Falls $A' = \mathbb{1}_n$, so ist $A$ invertierbar mit Inversem $A^{-1} = B'$.

Falls $A' \neq \mathbb{1}_n$, so ist $A$ nicht invertierbar.

## 6.29' Rezept: Linksinverses finden

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ gegeben. Überführe die Matrix

$$(A \mid \mathbb{1}_m)$$

durch Zeilentransformationen in eine Matrix

$$(A' \mid B'),$$

in der $A'$ Zeilennormalform besitzt

Falls $A' = \left.\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$, so bilden die ersten $n$ Zeilen $B'_{1,\dots,n}$ ein Linksinverses von $A$ (d.h. $B'_{1,\dots,n} \cdot A = \mathbb{1}_n$ ).

Falls $A' \neq \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$, so besitzt $A$ kein Linksinverses.

**Beispiel:** $A = \begin{pmatrix}1&2\\0&3\\3&0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1&2&1&0&0\\0&3&0&1&0\\3&0&0&0&1\end{array}\right) \quad (-3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1&2&1&0&0\\0&3&0&1&0\\0&-6&-3&0&1\end{array}\right) \quad \Big|\cdot\tfrac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1&2&1&0&0\\0&1&0&1/3&0\\0&-6&-3&0&1\end{array}\right) \quad \cdot 6 \quad (-2)$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\\0&0\end{matrix}}_{A'}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}1&-2/3&0\\0&1/3&0\end{matrix}}\\ \begin{matrix}-3&2&1\end{matrix}\end{matrix}}_{B'}\right) \quad B'_{1,2}$$

**Probe:** $B'_{1,2}\cdot A = \begin{pmatrix}1&-2/3&0\\0&1/3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ✓

⚠ Linksinverse sind i.A. nicht eindeutig,
z.B. auch $\begin{pmatrix}0&0&1/3\\0&1/3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

**Beweis, dass Rezept 6.29 / 6.29' funktioniert:**

Satz 6.20: Zeilentrafo ≙ Linksmultiplikation mit einem Produkt $\underline{E}$ von Elementarmatrizen.

Also: (a) $A' = E\cdot A$

und (b) $B' = E\cdot \mathbb{1}_m$, also $\underline{B' = E}$.

Falls $A' = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_n\\0\end{pmatrix}$, erhalten wir also:

$$\begin{pmatrix}\mathbb{1}_n\\0\end{pmatrix} = A' \overset{a}{=} E\cdot A \overset{b}{=} B'\cdot A.$$

Die ersten n Zeilen dieser Gleichung liefern Beh.:

$$\mathbb{1}_n = B'_{1,\dots,n} \cdot A$$

Beachte nun:

(*) Beh.: $A' = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_n\\ 0\end{pmatrix} \iff f_A$ injektiv

Beweis:

$$A' = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_n\\ 0\end{pmatrix} \overset{\text{Rezept 6.27}}{\iff} \operatorname{rk}(A) = n$$

$$\underset{\text{Rangformel 5.17}}{\iff} \dim(\ker f_A) = 0$$

$$\underset{\text{Inj.-Kriterium 4.17}}{\iff} f_A \text{ injektiv} \qquad \triangle$$

nach Vorlesung vereinfacht & ergänzt

Ist zusätzlich A quadratisch (also $m=n$), so folgt in obiger Situation, dass A invertierbar ist mit Inversem $A^{-1} = B'_{1,\dots,n}$:

Aus $f_A$ injektiv und $n=m$ folgt mit Korollar 5.19, dass $f_A$ ein Isomorphismus und somit A invertierbar ist, und

$$A^{-1} = \overbrace{B'_{1,\dots,n} \cdot \rlap{$\underbrace{\phantom{A \cdot A^{-1}}}_{\mathbb{1}_n}$}A}^{\mathbb{1}_n} \cdot A^{-1} = B'_{1,\dots,n}$$

Falls andererseits $A' \neq \begin{pmatrix}\mathbb{1}_n\\ 0\end{pmatrix}$, folgt aus Beh. (*), dass $f_A$ nicht injektiv ist, und somit kein Linksinverses besitzen kann (Blatt 3, Aufgabe 1). $\square$