6.30 Def.:

Die Transponierte einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ ist die $n \times m$-Matrix $A^T = (a_{ji})_{ij}$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

6.31 Lemma:

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(s \cdot A)^T = s \cdot A^T$ für $s \in K$

(d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (vgl. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$)

(e) A invertierbar $\iff$ A^T invertierbar.

In diesem Fall ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: a–c: klar

d: Schreibe A_{ij} für Eintrag in Zeile i, Spalte j der Matrix A.

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^T &= \left[\left(\textstyle\sum_j A_{ij} \cdot B_{jk}\right)_{i,k}\right]^T \\ &= \left[\left(\textstyle\sum_j A_{kj} \cdot B_{ji}\right)_{i,k}\right] \\ &= \left[\left(\textstyle\sum_j B_{ji} \cdot A_{kj}\right)_{i,k}\right] \\ &= \left[\left(\textstyle\sum_j (B^T)_{ij} \cdot (A^T)_{jk}\right)_{i,k}\right] = B^T \cdot A^T \end{aligned}$$

e: folgt aus d. $\square$

6.32 Def.: Sei $A = (\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n) = \begin{pmatrix} \underline{z}_1^T \\ \vdots \\ \underline{z}_m^T \end{pmatrix}$ Zeilen

Spalten

$\in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$.

$$\text{Spaltenrang}(A) := \dim_K \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle$$
$$\text{Zeilenrang}(A) := \dim_K \langle \underline{z}_1, \dots, \underline{z}_m \rangle$$

6.33 Rangsatz: Für jede Matrix gilt:

$$\text{Spaltenrang} = \text{Rang} = \text{Zeilenrang}$$

Beweis: $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$, $f_A : K^n \longrightarrow K^m$

(Spaltenrang = Rang)

Für Standardbasis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ von K^n gilt:

$$f_A(\underline{e}_i) = A \cdot \underline{e}_i = \underline{s}_i$$

Daher $\quad \operatorname{im} f_A = f_A(\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle)$

Blatt 7 Aufgabe 1(c)

$$= \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n) \rangle = \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle$$

Also ist $\operatorname{rk}(A) \overset{\text{Def}}{=} \dim(\operatorname{im} f_A)$

$$= \dim \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle \overset{\text{Def}}{=} \text{Spaltenrang}(A).$$

(Spaltenrang = Zeilenrang)

3 Vorüberlegungen

(i) Spaltenrang = Zeilenrang, falls A in Normalform ist:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Hier: $\quad \text{Spaltenrang} = \dim \underbrace{\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r \rangle}_{\text{in } K^m} = r.$

$\quad \text{Zeilenrang} = \dim \underbrace{\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r \rangle}_{\text{in } K^n} = r.$)

(ii) (Spalten)Rang ist invariant unter Zeilen- und Spaltentrafos (Korollar 6.22).

(iii) Zeilenrang ist auch invariant unter Zeilen- und Spaltentrafos:
Sei A' Matrix, die aus A durch solche Trafos hervorgeht. Dann ist $A' = E_\ell \cdot A \cdot E_r$ für Produkte von Elementarmatrizen E_ℓ und E_r.

$$
\begin{aligned}
\text{Zeilenrang}(A') &= \text{Spaltenrang}((A')^T) \\
&= \text{Spaltenrang}((E_\ell \cdot A \cdot E_r)^T) \\
&\overset{6.31(d)}{=} \text{Spaltenrang}(\underbrace{E_r^T}_{\text{Produkte von Elementarmatrizen}} \cdot A^T \cdot \underbrace{E_\ell^T}) \\
&= \text{Spaltenrang}(A^T) \\
&\overset{\text{Korollar } 6.22}{=} \text{Zeilenrang}(A).
\end{aligned}
$$

Sei nun A beliebige Matrix. Wähle E_ℓ und E_r so, dass $E_\ell \cdot A \cdot E_r$ in Normalform ist (möglich nach Satz 6.26 (6)). Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{Spaltenrang}(A) &\overset{(ii)}{=} \text{Spaltenrang}(E_\ell \cdot A \cdot E_r) \\
&\overset{(i)}{=} \text{Zeilenrang}(E_\ell \cdot A \cdot E_r) \\
&\overset{(iii)}{=} \text{Zeilenrang}(A)
\end{aligned}
$$

□

6.34 Def.: $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ hat ...

... vollen Zeilenrang, falls $\mathrm{rk}(A) := m$.

... vollen Spaltenrang, falls $\mathrm{rk}(A) = n$.

... vollen Rang, falls sie vollen Zeilen- **oder** Spaltenrang besitzt.

Beispiel:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

voller Spaltenrang

voller Rang

(Zeilenrang nicht voll)

6.35 Satz:

(a) A hat vollen Zeilenrang
$\iff$ A besitzt Rechtsinverses

(b) A hat vollen Spaltenrang
$\iff$ A besitzt Linksinverses

(c) Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ (also quadratisch) sind beide Bedingungen äquivalent, und es folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(A) = n &\iff A \text{ besitzt Linksinv.} \\ &\iff A \text{ besitzt Rechtsinv.} \\ &\iff A \text{ invertierbar.} \end{aligned}$$

Beweis:

b: folgt aus Rezept 6.29

a: folgt aus (b), denn A besitzt Rechtsinv. $\overset{6.31(d)}{\iff}$ A^T besitzt Linksinv.

c: folgt aus a & b. $\square$

6.36 Satz:

Ein n-Tupel $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ von Vektoren in K^m ist...

(a) ... ein Erzeugendensystem von K^m $\iff$ $\underbrace{(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)}_{\in \mathrm{Mat}(m \times n)}$ hat vollen Zeilenrang ($rk = m$)

(b) ... linear unabhängig $\iff$ $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ hat vollen Spaltenrang ($rk = n$)

(c) ... eine Basis $\iff$ $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ ist invertierbar (insbesondere $n = m$)

Beweis: Sei $A := (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$. Die lineare Abb.

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m.$$

bildet Standardbasis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ von K^n ab auf $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ in K^m.

a: $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ E-System $\overset{5.16(a)}{\iff}$ f_A surjektiv

$\underset{\text{Def. } rk}{\iff}$ $rk(f_A) = m$

$\underset{6.35(a)}{\iff}$ $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ hat vollen Zeilenrang.

b. $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ linear unabh. $\overset{5.16(b)}{\iff}$ f_A injektiv

$\underset{\substack{\text{Rangformel } 5.17 \\ + \text{ Inj.-Kriterium } 4.17}}{\iff}$ $rk(f_A) = n$

vgl. Beh (*) in Beweis zu Rezept 6.29.

$\underset{6.35(a)}{\iff}$ $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ hat vollen Zeilenrang.

nach Vorlesung vereinfacht & ergänzt

c: folgt. $\square$