

# 7. Matrizen II

Bisher:  $K^n \longrightarrow K^m$  mit Standardbasen auf  $K^n$  &  $K^m$ .

Jetzt:  $V \longrightarrow W$   
(oder:  $K^n \longrightarrow K^m$  mit anderen Basen)

Basen müssen i.A. gewählt werden!

Beispiel:

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \right\}$$

hat Basen  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

und  $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

und  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

usw. usf.

Mat  $(2 \times 2)$  hat Basen

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

usw. usf.

7.1 Satz: Eine lineare Abb. ist eindeutig bestimmt durch die Bilder einer Basis:

Ist  $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$  Basis von  $V$ ,

$C = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n)$  beliebiges Tupel in  $W$ ,

so existiert genau eine lineare Abb.  $f: V \rightarrow W$  mit  $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i \quad \forall i$ .

Beweis:

Argumentiere wie im Beweis zum Hauptsatz, Teil II (6.4):

Jedes  $\underline{v} \in V$  besitzt eindeutige Darstellung der Form

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n s_i \cdot \underline{b}_i \quad \text{mit } s_i \in K.$$

Definiere  $f$  durch

$$f(\underline{v}) := \sum_{i=1}^n s_i \cdot \underline{c}_i$$

Das ist wohldef. wegen Eindeutigkeit der  $s_i$ , und erfüllt offenbar  $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$ .

Ferner ist  $f$  linear [...].

Diese Abb. ist ferner eindeutig:

Ist  $g$  irgendeine lineare Abb.  $g: V \rightarrow W$  mit  $g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$ , so folgt:

$$\begin{aligned} g(\underline{v}) &= g\left(\sum_{i=1}^n s_i \cdot \underline{b}_i\right) \\ &= \sum_i s_i \cdot g(\underline{b}_i) \end{aligned}$$

$g$  linear  $\uparrow$

$$= \sum_i s_i \cdot \underline{c}_i = f(\underline{v}).$$

$g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i \uparrow$

□

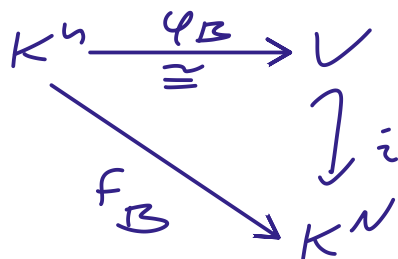
7.2 Notation: Ist  $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$  Basis von  $V$ ,  
 so sei  $\varphi_B$  die nach 7.1 eindeutige lineare Abb.

$$\varphi_B: K^n \xrightarrow{\cong} V$$

$\xrightarrow{\text{Standardbasis}} \underline{e}_i \mapsto \underline{b}_i$   
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_i x_i \underline{b}_i$

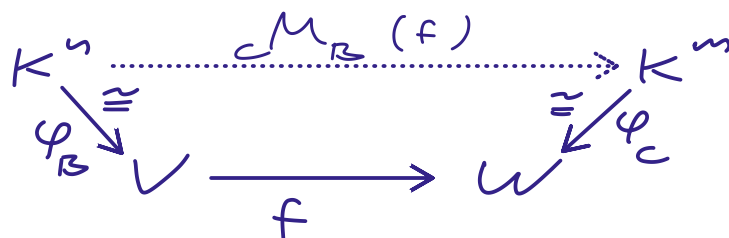
Ist  $V = K^n$ , so ist  $\varphi_B = f_B$ , also Multiplikation  
 mit der Matrix  $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ .

Ist allgemeiner  $V \subseteq K^N$  ein  $n$ -dim. UVR,  
 so können wir eine Basis  $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$   
 von  $V$  auffassen als  $N \times n$ -Matrix auffassen  
 (von vollem Rang  $n$ ). Dann ist  $i \circ \varphi_B = f_B$ .



7.3 Def.: Sei  $f: V \rightarrow W$  lineare Abb.  
 zwischen VR der Dimensionen  $n$  bzw.  $m$ .  
 Seien  $B$  und  $C$  Basen von  $V$  bzw.  $W$ .  
 Die Matrix zu  $f$  bezüglich  $B$  und  $C$

ist die Matrix zur linearen Abb.  $\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B$ :



7.4 Satz: Die Einträge der Matrix  ${}_C M_B(f) = (m_{ij})_{ij}$  erfüllen die Gleichung

$$f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{c}_i$$

und sind hierdurch eindeutig bestimmt.

Wir können also aus Spalte  $j$  von  ${}_C M_B(f)$  das Bild von  $\underline{b}_j$  unter  $f$  ablesen.

Beweis: Per Def. sind die  $m_{ij}$  eindeutig bestimmt durch

$$(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B)(\underline{e}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{e}_i$$

(siehe Beweis zu Satz 6.4).

Wende nun  $\varphi_C$  an:

$$f(\underbrace{\varphi_B(\underline{e}_j)}_{\underline{b}_j}) = \sum_i m_{ij} \underbrace{\varphi_C(\underline{e}_i)}_{\underline{c}_i}$$

□

Beispiele:

(a)  $V = K^n$ ,  $W = K^m$ ,  $B, C$  Standardbasen.

Dann ist  $\varphi_B = \text{id}$ ,  $\varphi_C = \text{id}$ ,

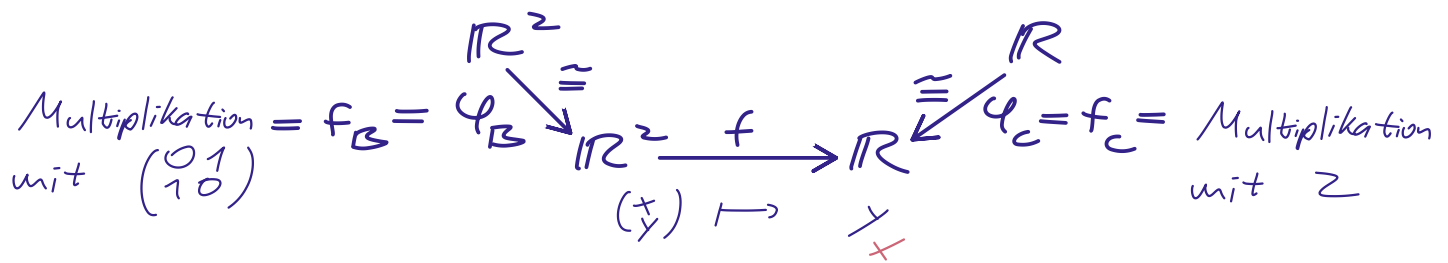
und  ${}_C M_B(f)$  ist die zu  $f$  gehörige Matrix im Sinne von Satz 6.4.

Wir schreiben in diesem Fall kurz  $M(f)$ .

(b)  $V = \mathbb{R}^2$  mit Basis  $B := \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

$W = \mathbb{R}$  mit Basis  $C := \left( \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \right)$ .

$f: V \rightarrow W$   
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$



$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 {}_C M_B(f) &= M(f_C^{-1} \circ f \circ f_B) \\
 &= M(f_C)^{-1} \cdot M(f) \cdot M(f_B) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**7.5 Satz:** Sei  $\dim V = n$ ,  $B$  Basis von  $V$ ,  
 (vgl. Satz 6.7)  $\dim W = m$ ,  $C$  Basis von  $W$ .

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mat}_K(m \times n) & \longleftarrow & \text{Hom}_K(V, W) \\
 {}_B M_C(f) & \longleftarrow & f
 \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR.

**Beweis:** Die Abbildung ist die Komposition folgender Isomorphismen:

$$\text{Mat}_K(m \times n) \stackrel{(6.7)}{\cong} \text{Hom}_K(K^n, K^m) \cong \text{Hom}_K(V, W)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \mapsto & f_S & \mid & g & \mapsto & \varphi_C \circ g \circ \varphi_B^{-1} \\
 M(f) & \longleftarrow & f & \mid & \varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B & \longleftarrow & f
 \end{array}$$

□

7.6 Satz (vgl. 6.9):

Seien  $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$  lineare Abb.,  
A B C Basen.

Dann ist

$${}_C M_A(f \circ g) = {}_C M_B(f) \cdot {}_B M_A(g)$$

Beweis:

Wir wissen bereits:

$$(*) M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$$

im Fall  $U = K^o$ ,  $V = K^n$ ,  $W = K^m$

(mit Standardbasen), siehe 6.9/6.10.

Daher folgt:

$$\begin{aligned} {}_C M_A(f \circ g) &= M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ g \circ \varphi_A) \\ &= M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B \circ \varphi_B^{-1} \circ g \circ \varphi_A) \\ &\stackrel{(*)}{=} M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B) \cdot M(\varphi_B^{-1} \circ g \circ \varphi_A) \\ &= {}_C M_B(f) \cdot {}_B M_A(g). \quad \square \end{aligned}$$

# Vergleichsübersicht

Kapitel 6:

Basis  $e_1, \dots, e_n$       Basis  $e_1, \dots, e_m$

$$\text{Mat}_K(m \times n) \cong \text{Hom}_K(K^n, K^m)$$

$$S \mapsto (f_S : x \mapsto S \cdot x)$$

$$M(f) \leftarrow f$$

$$(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Eintrag  $i$  in Spalte  $j$   
ist also Koeffizient  
 $m_{ij}$  von  $e_i$  in

$$f(e_j) = \sum_i m_{ij} e_i$$

Kapitel 7:

Basis  $B = (b_1, \dots, b_n)$       Basis  $C = (c_1, \dots, c_m)$

$K^n$        $K^m$

$\varphi_B \cong$        $\cong \varphi_C$

$$\text{Mat}_K(m \times n) \cong \text{Hom}_K(V, W)$$

$$S \mapsto \varphi_C \circ f_S \circ \varphi_B^{-1}$$

$${}_C M_B(f) \leftarrow f$$

7.4: Eintrag  $i$  in Spalte  $j$   
ist Koeffizient  
 $m_{ij}$  von  $e_i$  in

$$f(b_j) = \sum_i m_{ij} c_i$$