7. Matrizen II

Bisher: $K^n \longrightarrow K^m$ mit Standardbasen auf K^n & K^m.

Jetzt: $V \longrightarrow W$
(oder: $K^n \longrightarrow K^m$ mit anderen Basen)

Basen müssen i.A. **gewählt** werden!

Beispiel:

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$$

hat Basen $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

usw. usf.

Mat (2×2) hat Basen

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

usw. usf.

7.1 Satz: Eine lineare Abb. ist eindeutig bestimmt durch die Bilder einer Basis:

Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V,

$\mathcal{C} = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n)$ beliebiges Tupel in W,

so existiert genau eine lineare Abb. $f: V \longrightarrow W$ mit $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i \ \forall i$.

Beweis:

Argumentiere wie im Beweis zum Hauptsatz, Teil II (6.4):

Jedes $\underline{v} \in V$ besitzt eindeutige Darstellung der Form

$$\underline{v} = \Sigma_{i=1}^n s_i \cdot \underline{b}_i \qquad \text{mit} \quad s_i \in K.$$

Definiere f durch

$$f(\underline{v}) := \Sigma_{i=1}^n s_i \cdot \underline{c}_i$$

Das ist wohldef. wegen Eindeutigkeit der s_i, und erfüllt offenbar $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$.

Ferner ist f linear [...].

Diese Abb. ist ferner eindeutig:

Ist g irgendeine lineare Abb. $g: V \longrightarrow W$ mit $g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$, so folgt:

$$\begin{aligned} g(\underline{v}) &= g\left(\Sigma_{i=1}^n s_i \cdot \underline{b}_i\right) \\ &\underset{g \text{ linear}}{=} \Sigma_i \, s_i \cdot g(\underline{b}_i) \\ &\underset{g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i}{=} \Sigma_i \, s_i \cdot \underline{c}_i = f(\underline{v}). \end{aligned}$$

$\square$

7.2 Notation: Ist $\underline{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V, so sei φ_B die nach 7.1 eindeutige lineare Abb.

$$\begin{aligned} \varphi_B : K^n &\xrightarrow{\cong} V \\ \underline{e}_i &\longmapsto \underline{b}_i \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto \textstyle\sum_i x_i \cdot \underline{b}_i \end{aligned}$$

Standard-basis

Ist $V = K^n$, so ist $\varphi_B = f_B$, also Multiplikation mit der Matrix $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$.

Ist allgemeiner $V \subseteq K^N$ ein n-dim. UVR, so können wir eine Basis $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ von V auffassen als $N \times n$-Matrix auffassen (von vollem Rang n). Dann ist $i \circ \varphi_B = f_B$.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\varphi_B", "\cong"'] \arrow[dr, "f_B"'] & V \arrow[d, "i"] \\ & K^N \end{tikzcd}$$

7.3 Def.: Sei $f : V \longrightarrow W$ lineare Abb. zwischen VR der Dimensionen n bzw. m. Seien B und C Basen von V bzw. W. Die *Matrix zu f bezüglich B und C*

ist die Matrix zur linearen Abb. $\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B$:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, dotted, "{}_C M_B(f)"] \arrow[d, "\varphi_B"', "\cong"] & K^m \arrow[d, "\varphi_C", "\cong"'] \\ V \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

7.4 Satz: Die Einträge der Matrix
${}_C M_B(f) = (m_{ij})_{ij}$ erfüllen die Gleichung

$$f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \cdot \underline{c}_i$$

und sind hierdurch eindeutig bestimmt.

Wir können also aus Spalte j von ${}_C M_B(f)$ das Bild von $\underline{b}_j$ unter f ablesen.

Beweis: Per Def. sind die m_{ij} eindeutig bestimmt durch

$$(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B)(\underline{e}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{e}_i$$

(siehe Beweis zu Satz 6.4).

Wende nun φ_C an:

$$f(\underbrace{\varphi_B(\underline{e}_j)}_{\underline{b}_j}) = \sum_i m_{ij} \underbrace{\varphi_C(\underline{e}_i)}_{\underline{c}_i} \qquad \square$$

Beispiele:

(a) $V = K^n$, $W = K^m$, B, C Standardbasen.
Dann ist $\varphi_B = id$, $\varphi_C = id$,
und ${}_C M_B(f)$ ist die zu f gehörige Matrix im Sinne von Satz 6.4.

Wir schreiben in diesem Fall kurz
$M(f)$.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ mit Basis $B := \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$.
$W = \mathbb{R}$ mit Basis $C := ((2))$.

$$f : V \longrightarrow W$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto y$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[dr, "\cong"] & & & \mathbb{R} \arrow[dl, "\cong"'] \\
& \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Multiplikation mit $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $= f_B = \varphi_B$ $\qquad$ $\varphi_C = f_C =$ Multiplikation mit 2

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \genfrac{}{}{0pt}{}{y}{x}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \\ M(f) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
{}_C M_B(f) &= M(f_C^{-1} \circ f \circ f_B) \\
&= M(f_C)^{-1} \cdot M(f) \cdot M(f_B) \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\tfrac{1}{2} & 0\end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix}0 & \tfrac{1}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7.5 Satz: Sei $\dim V = n$, B Basis von V,
(vgl. Satz 6.7) $\dim W = m$, C Basis von W.

Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_K(m \times n) &\longleftarrow \mathrm{Hom}_K(V, W) \\
{}_B M_C(f) &\longleftarrow\!\shortmid \quad f
\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Beweis: Die Abbildung ist die Komposition folgender Isomorphismen:

$$\mathrm{Mat}_K(m \times n) \underset{(6.7)}{\cong} \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \cong \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
S & \longmapsto & f_S & g & \longmapsto & \varphi_C \circ g \circ \varphi_B^{-1} \\
M(f) & \longleftarrow\!\shortmid & f & \varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B & \longleftarrow\!\shortmid & f
\end{array}$$

$\square$

7.6 Satz (vgl. 6.9):

Seien $\underset{A}{U} \xrightarrow{g} \underset{B}{V} \xrightarrow{f} \underset{C}{W}$ lineare Abb., Basen.

Dann ist

$$_C M_A(f \circ g) = {_C M_B}(f) \cdot {_B M_A}(g)$$

Beweis:

Wir wissen bereits:

$$(*) \quad M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$$

im Fall $U = K^o$, $V = K^n$, $W = K^m$
(mit Standardbasen), siehe 6.9/6.10.

Daher folgt:

$$\begin{aligned} {_C M_A}(f \circ g) &= M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ g \circ \varphi_A) \\ &= M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B \circ \varphi_B^{-1} \circ g \circ \varphi_A) \\ &\overset{(*)}{=} M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B) \cdot M(\varphi_B^{-1} \circ g \circ \varphi_A) \\ &= {_C M_B}(f) \cdot {_B M_A}(g). \end{aligned}$$

$\square$

Vergleichsübersicht

Kapitel 6:

Basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ Basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$

$$\mathrm{Mat}_K(m \times n) \cong \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$$

$$S \longmapsto \left(f_S : \underline{x} \longmapsto S \cdot \underline{x}\right)$$

$$M(f) \longleftarrow f$$

$$M(f) = \left(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)\right)$$

Eintrag i in Spalte j ist also Koeffizient m_{ij} von $\underline{e}_i$ in

$$f(\underline{e}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{e}_i$$

Kapitel 7:

Basis $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis $C = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m)$

$$K^n \xrightarrow[\cong]{\varphi_B} V, \qquad K^m \xrightarrow[\cong]{\varphi_C} W$$

$$\mathrm{Mat}_K(m \times n) \cong \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

$$S \longmapsto \varphi_C \circ f_S \circ \varphi_B^{-1}$$

$$_C M_B(f) \longleftarrow f$$

7.4: Eintrag i in Spalte j ist Koeffizient m_{ij} von $\underline{c}_i$ in

$$f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{c}_i$$