7.7 Korollar: Transformationsformel

V VR mit Basen B, B'

W VR mit Basen C, C'

Für jede lineare Abb. $f: V \longrightarrow W$ gilt:

$$ {}_{C'}M_{B'}(f) = {}_{C'}M_C(id) \cdot {}_C M_B(f) \cdot {}_B M_{B'}(id) $$

$\square$

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "{}_C M_B(f)\cdot"] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] & & & K^m \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \arrow[dd, "{}_{C'}M_C(id)"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[uu, "{}_B M_{B'}(id)"] \arrow[ur, "\varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[rrr, "{}_{C'}M_{B'}(f)\cdot"'] & & & K^m \arrow[ul, "\varphi_{C'}", "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

Wie berechnet man ${}_{C'}M_C(id)$ & ${}_B M_{B'}(id)$?

Option A: mit Satz 7.4

z. B.: ${}_B M_{B'}(id) = (m_{ij})$ für die Koeffizienten, die bestimmt sind durch

$$ b_j' = \Sigma_i \, m_{ij} \, b_i $$

für
$$ B' = (b_1', \dots, b_n') $$
$$ B = (b_1, \dots, b_n). $$

Option B: Wenn V, W als UVR von K^N, K^M gegeben sind, mit folgendem Rezept.

Rezept 7.8: Basiswechsel für lineare Abb. zwischen UVR der Standardräume

$V \subseteq K^N$ UVR, $\dim V = n$

$W \subseteq K^M$ UVR, $\dim W = m$

$\left.\begin{array}{l} B, B' \text{ Basen von } V \\ C, C' \text{ Basen von } W \end{array}\right\}$ Basisvektoren gegeben als Vektoren in K^N bzw. K^M.

$f: V \longrightarrow W$ lineare Abb.

Gegeben: ${}_C M_B(f)$

Gesucht: ${}_{C'} M_{B'}(f)$

SCHRITT 1: Fasse

B und B' auf als $N \times n$-Matrizen,

C und C' auf als $M \times m$-Matrizen.

SCHRITT 2: Finde Linksinverse L_B zu B,

$L_{C'}$ zu C',

zum Beispiel mit Rezept 6.29!

SCHRITT 3:

$$ {}_{C'} M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_C M_B(f) \cdot L_B \cdot B' $$

FERTIG

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "{}_C M_B(f)"] \arrow[d, "B\cdot"'] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] & & & K^m \arrow[d, "C\cdot"] \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \\
K^N \arrow[u, bend left, dotted, "L_B"] & V \arrow[l, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[r, hook, "i"] & K^M \arrow[d, bend left, dotted, "L_{C'}"] \\
K^n \arrow[u, "B'\cdot"] \arrow[ur, "\varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[rrr, "{}_{C'} M_{B'}(f)"'] & & & K^m \arrow[u, "C'\cdot"'] \arrow[ul, "\varphi_{C'}", "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

Beweis: Linksinverse existieren, da die Matrizen B, B', C, C' jeweils vollen Spaltenrang haben (weil die Spalten jeweils l.u. sind), siehe 6.35 & 6.36.

Es ist nach 7.7 nur noch zu zeigen:

a: $${}_B M_{B'}(id) = L_B \cdot B'$$

b: $${}_{C'} M_C(id) = L_{C'} \cdot C$$

zu a: Es ist $L_B \cdot B = 1\!\!1_n$.

Daher ist

$$f_{L_B} \circ \underbrace{i \circ \varphi_B}_{f_B} = f_{L_B} \circ f_B = f_{L_B \cdot B}$$
$$= f_{1\!\!1_n}$$
$$= id.$$

Da φ_B Iso ist, folgt

(*) $$f_{L_B} \circ i = \varphi_B^{-1}.$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}
{}_B M_{B'}(id) &= M(\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{B'}) \\
&\overset{(*)}{=} M(f_{L_B} \circ \underbrace{i \circ \varphi_{B'}}) \\
&= M(f_{L_B} \circ f_{B'}) \\
&= M(f_{L_B \cdot B'}) \\
&= L_B \cdot B'
\end{aligned}$$

zu b: analog. $\square$

Beispiel zu Rezept 7.8: [nicht in Vorlesung vorgeführt]

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x=y\right\} \qquad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; y=-z\right\}$$

mit Basen

$$B=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad C=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$B'=\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) \qquad C'=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\right)$$

Gegeben sei $f\colon V\longrightarrow W$ mit

$$ {}_C M_B(f) = \begin{pmatrix}0&1\\3&1\end{pmatrix}$$

Gesucht: ${}_{C'}M_{B'}(f)$

SCHRITT 1:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rrr, "\begin{pmatrix}0&1\\3&1\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1&0\\2&0\\0&1\end{pmatrix}"'] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, bend left, dashed, "L_B"] & V \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "f"] & W \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, bend left, dashed, "L_{C'}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\begin{pmatrix}0&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}"] \arrow[ur, "\cong", "\varphi_{B'}"'] \arrow[rrr, "{}_{C'}M_{B'}(f)"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "\varphi_{C'}", "\cong"'] \arrow[u, "\begin{pmatrix}2&0\\0&-\frac12\\0&\frac12\end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

SCHRITT 2:

L_B:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -2$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓)

$L_{C'}$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{2} \\ | \cdot (-2) \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_{C'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Probe:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓)

SCHRITT 3:

$$
\begin{aligned}
{}_{C'}M_{B'}(f) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$