

7.7 Korollar: Transformationsformel

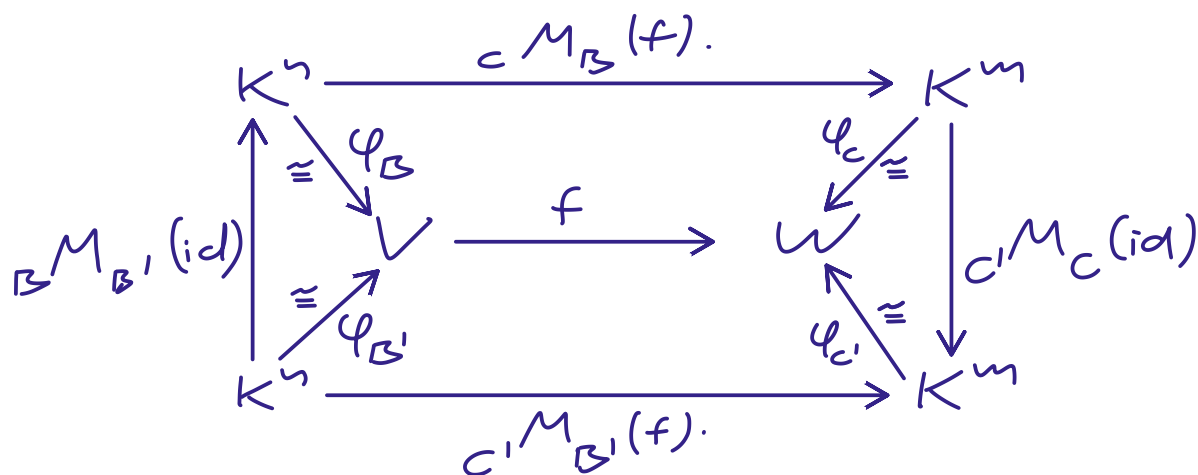
V VR mit Basen B, B'

W VR mit Basen C, C'

Für jede lineare Abb. $f: V \rightarrow W$ gilt:

$${}_{C'}M_{B'}(f) = {}_{C'}M_C(id) \cdot {}_CM_B(f) \cdot {}_BM_{B'}(id)$$

□



Wie berechnet man ${}_{C'}M_C(id)$ & ${}_BM_{B'}(id)$?

Option A: mit Satz 7.4

z.B.: ${}_BM_{B'}(id) = (m_{ij})$ für die Koeffizienten, die bestimmt sind durch

$$\underline{b}'_j = \sum_i m_{ij} \underline{b}_i$$

$$\text{für } B' = (\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_n) \\ B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n).$$

Option B: Wenn V, W als UVR von K^N, K^M gegeben sind, mit folgendem Rezept.

Rezept 7.8: Basiswechsel für lineare Abb. zwischen UVR der Standardräume

$$V \subseteq K^N \quad \text{UVR}, \quad \dim V = n$$

$$W \subseteq K^M \quad \text{UVR}, \quad \dim W = m$$

B, B' Basen von V
 C, C' Basen von W

Basisvektoren
 gegeben als
 Vektoren in
 K^N bzw. K^M .

$f: V \longrightarrow W$ lineare Abb.

Gegeben: ${}_C M_B(f)$

Gesucht: ${}_{C'} M_{B'}(f)$

SCHRITT 1: Fasse

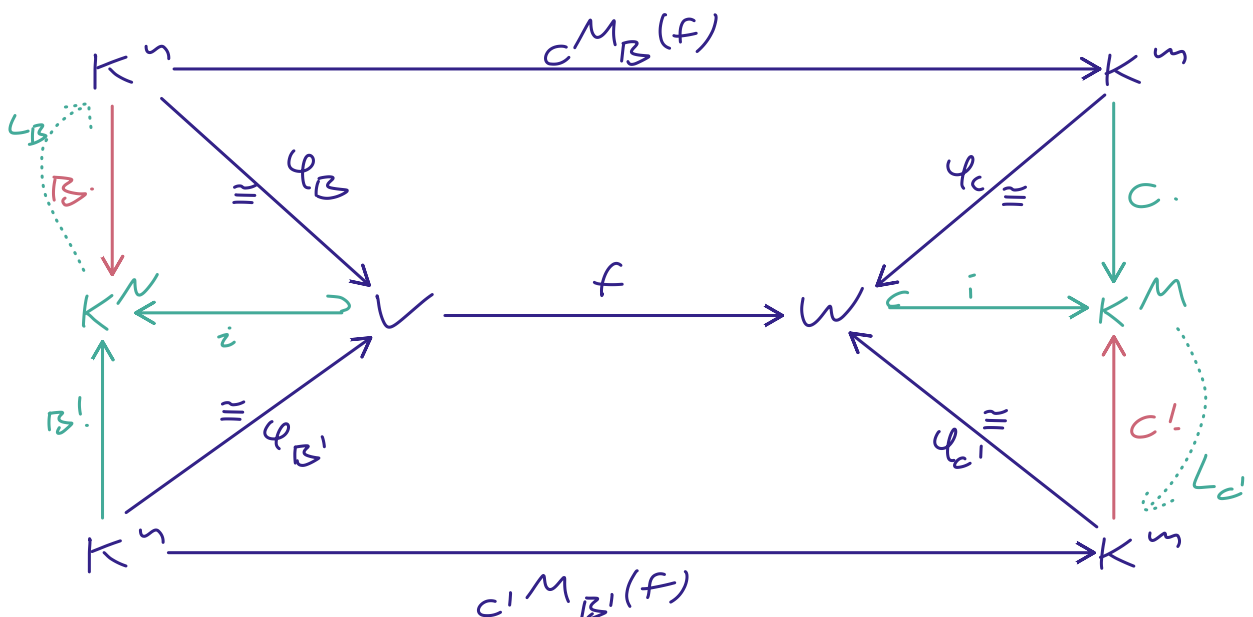
B und B' auf als $N \times n$ -Matrizen,
 C und C' auf als $M \times m$ -Matrizen.

SCHRITT 2: Finde Linksinverse L_B zu B ,
 $L_{C'}$ zu C' ,
 zum Beispiel mit Rezept 6.29!

SCHRITT 3:

$${}_{C'} M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_C M_B(f) \cdot L_B \cdot B'$$

FERTIG



Beweis: Linksinverse existieren, da die Matrizen B, B', C, C' jeweils vollen Spaltenrang haben (weil die Spalten jeweils l.u. sind), siehe 6.35 & 6.36.

Es ist nach 7.7 nur noch zu zeigen:

a: $B M_{B'}(\text{id}) = L_B \cdot B'$

b: $C' M_C(\text{id}) = L_{C'} \cdot C$

zu a: Es ist $L_B \cdot B = 1_n$.

Daher ist

$$\begin{aligned} f_{L_B} \circ \underbrace{i \circ \varphi_B}_{f_B} &= f_{L_B} \circ f_B = f_{L_B \cdot B} \\ &= f_{1_n} \\ &= \text{id}. \end{aligned}$$

Da φ_B Iso ist, folgt

(*) $f_{L_B} \circ i = \varphi_B^{-1}$.

Also folgt:

$$\begin{aligned} B M_{B'}(\text{id}) &= M(\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{B'}) \\ &\stackrel{(*)}{=} M(f_{L_B} \circ \underbrace{i \circ \varphi_{B'}}_{f_{B'}}) \\ &= M(f_{L_B} \circ f_{B'}) \\ &= M(f_{L_B \cdot B'}) \\ &= L_B \cdot B' \end{aligned}$$

zu b: analog.

□

Beispiel zu Rezept 7.8:

[nicht in Vorlesung vorgeführt]

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \right\} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z \right\}$$

mit Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

mit Basen

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

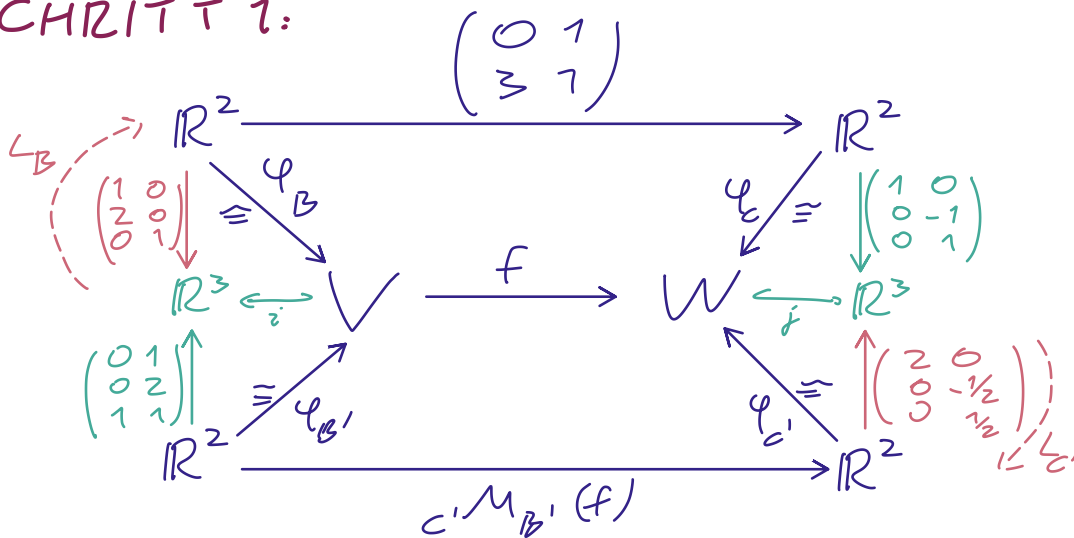
$$C' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

Gegeben sei $f: V \rightarrow W$ mit

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: ${}_{C'} M_{B'}(f)$

SCHRITT 1:



SCHRITT 2:

$$L_B: \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\uparrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Probe:})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$L_{C'}: \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{C'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Probe:})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

SCHRITT 3:

$$\begin{aligned} {}_C M_{B'}(f) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$