

7.7 Korollar: Transformationsformel

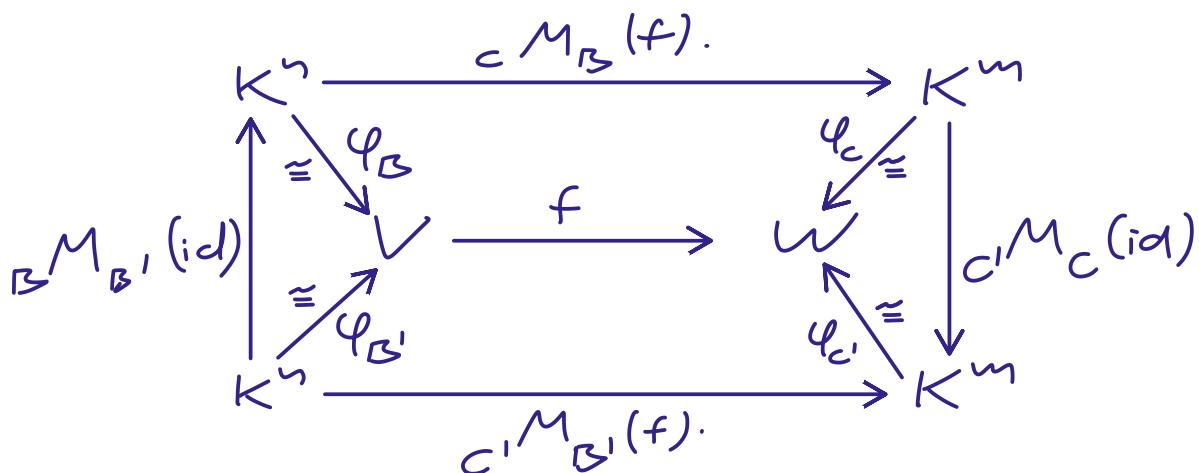
\vee V VR mit Basen B, B'

\wedge W VR mit Basen C, C'

Für jede lineare Abb. $f: V \rightarrow W$ gilt:

$$c'M_{B'}(f) = c'M_C(\text{id}) \cdot cM_B(f) \cdot {}_B M_{B'}(\text{id})$$

□



Wie berechnet man $c'M_C(\text{id})$ & ${}_B M_{B'}(\text{id})$?

Option A: mit Satz 7.4

z.B.: ${}_B M_{B'}(\text{id}) = (m_{ij})$ für die Koeffizienten, die bestimmt sind durch

$$\underline{b}_j' = \sum_i m_{ij} \underline{b}_i$$

$$\text{für } B' = (\underline{b}_1', \dots, \underline{b}_n')$$

$$B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n).$$

Option B: Wenn V, W als UVR von K^N, K^M gegeben sind, mit folgendem Rezept.

Rezept 7.8: Basiswechsel für lineare Abls. zwischen UVR der Standardräume

$$V \subseteq K^N \quad \text{UVR}, \quad \dim V = n$$

$$W \subseteq K^M \quad \text{UVR}, \quad \dim W = m$$

B, B' Basen von V

C, C' Basen von W

$f: V \longrightarrow W$ lineare Abls.

Basisvektoren
gegeben als
Vektoren in
 K^N bzw. K^M .

Gegeben: $cM_B(f)$

Gesucht: $c'M_{B'}(f)$

SCHRITT 1: Fasse

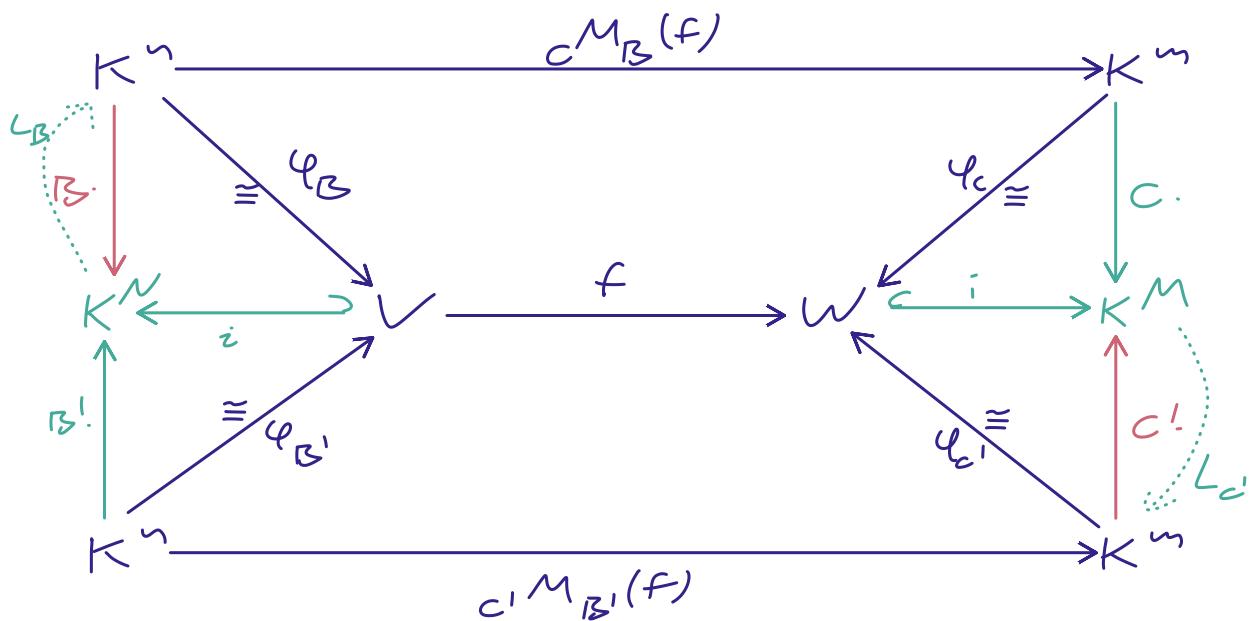
B und B' auf als $N \times n$ -Matrizen,
 C und C' auf als $M \times m$ -Matrizen.

SCHRITT 2: Finde Linksinverse L_B zu B ,
 $L_{C'}$ zu C' ,
zum Beispiel mit Rezept 6.25!

SCHRITT 3:

$$c'M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot cM_B(f) \cdot L_B \cdot B'$$

FERTIG



Beweis: Linksinverse existieren, da die Matrizen B, B', C, C' jeweils vollen Spaltenrang haben (weil die Spalten jeweils l.u. sind), siehe 6.35 & 6.36.

Es ist nach 7.7 nur noch zu zeigen:

$$a: \quad {}_B M_{B'}(\text{id}) = L_B \cdot B'$$

$$b: \quad {}_{C'} M_C(\text{id}) = L_{C'} \cdot C$$

zu a: Es ist $L_B \cdot B = 1_{\mathbb{M}}$.

Daher ist

$$\begin{aligned} f_{L_B} \circ i \circ \underbrace{\varphi_B}_{f_B} &= f_{L_B} \circ f_B = f_{L_B \cdot B} \\ &= f_{1_{\mathbb{M}}} \\ &= \text{id}. \end{aligned}$$

Da φ_B Iso ist, folgt

$$(x) \quad f_{L_B} \circ i = \varphi_B^{-1}.$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} {}_B M_{B'}(\text{id}) &= M(\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{B'}) \\ &\stackrel{(x)}{=} M(f_{L_B} \circ i \circ \underbrace{\varphi_{B'}}_{f_{B'}}) \\ &= M(f_{L_B} \circ f_{B'}) \\ &= M(f_{L_B \cdot B'}) \\ &= L_B \cdot B' \end{aligned}$$

zu b: analog. □

Beispiel zu Rezept 7.8:

[nicht in Vorlesung vorgeführt]

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \right\} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z \right\}$$

mit Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

mit Basen

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

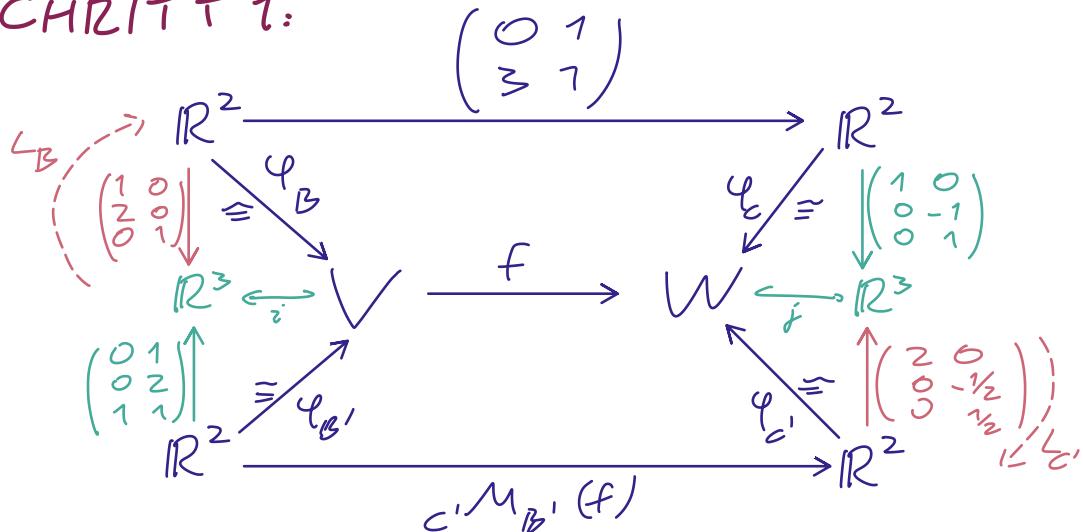
$$C' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

Gegeben sei $f: V \rightarrow W$ mit

$${}_{C'} M_B (f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: ${}_{C'} M_{B'} (f)$

SCHRITT 1:



SCHRITT 2:

$$L_B: \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{5}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Probe:} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$L_{C^1}: \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (-2) \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_{C^1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Probe:} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

SCHRITT 3:

$$\begin{aligned}c^1 M_{B^1}(f) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\cdot} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\cdot} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\cdot} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\cdot} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\cdot} \\&= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\cdot} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\cdot} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\cdot} \\&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$