

8.7 Multiplikationssatz

Für $A, B \in \text{Mat}_K(n \times n)$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

8.8 Korollar:

$A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt: $\det(A) \neq 0$.

In diesem Fall ist $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Beweis 8.7 $\Rightarrow$ 8.8:

($\Rightarrow$) Falls A invertierbar, existiert Matrix A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$.

Aus 8.7 folgt durch Anwenden von $\det$:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

Also folgt $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

($\Leftarrow$) Sei A nicht invertierbar. (z.z: $\det A = 0$).
Nach Satz 6.26(b) können wir A mittels Zeilen- und Spaltentrafos auf Normalform bringen. Es existieren also invertierbare Matrizen S, T (siehe 6.20) mit

$$S \cdot A \cdot T = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & 0 & \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r = \text{Rang } A}$

Da A nicht invertierbar ist, hier $r < n$ (Satz 6.35(c)).

Daher ergibt sich aus 8.7:

$$\underbrace{\det S}_{\neq 0} \cdot \det A \cdot \underbrace{\det T}_{\neq 0} = 0 \quad \text{in } K$$

$\uparrow$ im Schritt $(\Rightarrow)$ bewiesen $\uparrow$

Also folgt $\det A = 0$. □

Beweis zu 8.7:

Sei $A = (a_{ij})_{ij}$
 $B = (b_{jk})_{jk}$,

$$\underline{b}_j = (b_{j1} \ b_{j2} \ \dots \ b_{jn})$$

= Zeile j von B

$$A \cdot B = \left(\sum_j a_{ij} \cdot \underset{\substack{= \\ 1}}{b_{jk}} \right)_{ik} = \begin{pmatrix} (\sum_j a_{1j} b_{jk})_k \\ \vdots \\ (\sum_j a_{nj} b_{jk})_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \underline{b}_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} \underline{b}_j \end{pmatrix}$$

Rechne nun wie in Beweis zu 8.4, Teil 2:

$$\det(A \cdot B) = \det \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \underline{b}_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} \underline{b}_j \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{8.4(D1)}{=} \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} \underline{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{DZ}{=} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \\ \text{alle } j_i \\ \text{verschieden}}} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} b_{1j_1} \\ \vdots \\ b_{nj_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ b_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{8.5}{=} \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) \right) \det(B)$$

↑
unabhängig
von σ

$$= \det A \cdot \det B$$



8.9 Laplacescher Entwicklungssatz:

Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$, $k, l \in \{1, \dots, n\}$

sei $A_{\#k,l} \in \text{Mat}_K((n-1) \times (n-1))$ die Matrix, die aus A hervorgeht, indem wir Zeile k und Spalte l streichen.

(a) Entwicklung nach Zeile k :

$$\det(A) = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det(A_{\#k,l})$$

(b) Entwicklung nach Spalte l :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det(A_{\#k,l})$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a: Entwicklung nach Zeile 1:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 8 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-14) + 8 \cdot (-(-7)) \\ &= 42 \end{aligned}$$

b: Entwicklung nach Spalte

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot (\dots) + 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot (\dots) \\ &= 7 \cdot (-2 - (-8)) \\ &= 7 \cdot 6 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Vorzeichen $(-1)^{k+l}$ ergeben Schachbrettmuster:

$$\left((-1)^{k+l}\right)_{k,l} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Beweis zu 8.9.:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \boxed{B} \\ \vdots & \\ * & \end{pmatrix} = \det B$$

(folgt z.B. direkt aus Leibnizformel [...])

Damit lässt sich (a) direkt nachrechnen:

$$A = (a_{ij})_{ij}, \quad \underline{a}_i = (a_{i1} \dots a_{in}) \\ = \text{Zeile } i \text{ von } A$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_k \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_k = \sum_l a_{kl} \overset{\substack{\text{l-ter Standard-} \\ \text{Zeilenvektor}}}{\underline{e}_l}$$

$$\overset{\substack{\text{8.4(D1)} \\ \text{für Zeile } k}}{=} \sum_l a_{kl} \cdot \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_{k-1} \\ \underline{e}_l \\ \underline{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_l a_{kl} \cdot (-1)^k \cdot \det \begin{pmatrix} e_l \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&\quad \text{Tausche } k\text{-mal Zeilen} \\
&= \sum_l a_{kl} \cdot (-1)^k \cdot (-1)^l \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ * & & & \end{pmatrix} \\
&\quad \text{Tausche } l\text{-mal Spalten} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\det(A_{\#kl})}
\end{aligned}$$

6: analog.

□

8.10 Def.: Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sei

$A_{\#kl} \in \text{Mat}_K((n-1) \times (n-1))$ wie in 8.9.

Die **Adjungierte**

$$A^\# \in \text{Mat}_K(n \times n)$$

ist gegeben durch

$$(A^\#)_{ij} := \left((-1)^{i+j} \cdot \det(A_{\#ji}) \right)_{ij}$$

8.11 Satz: Für jedes $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist

$$A \cdot A^\# = A^\# \cdot A = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$$

8.12 Korollar: Für jede invertierbare Matrix A gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^\#$$

Beispiel:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $ad-bc \neq 0$,
8.8

und in diesem Fall gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale tauschen,

Nebendiagonale negieren

und Determinante nicht vergessen!

Beweis zu 8.11:

$$A = (a_{ij})_{ij}$$

$$A^\# = (a_{ij}^\#)_{ij} \quad \text{mit } a_{ij}^\# := (-1)^{i+j} \det(A_{\#ji})$$

Wir berechnen den Koeffizienten $[A \cdot A^\#]_{k,l}$
von $A \cdot A^\#$ in Zeile k und Spalte l .

$$\begin{aligned} [A \cdot A^\#]_{k,l} &= \sum_j a_{kj} \cdot a_{jl}^\# \\ &= \sum_j a_{kj} \cdot (-1)^{j+l} \det(A_{\#lj}) \end{aligned}$$

(*)

Für $k=l$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} [A \cdot A^\#]_{l,l} &= \sum_j a_{lj} \cdot (-1)^{j+l} \det(A_{\#lj}) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

↑
Laplace 8.10(a):
Entwicklung nach Zeile l

Für $k \neq l$ hängt (*) gar nicht von den Einträgen von A in Zeile l ab. Also können wir in (*) A ersetzen durch die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{ij}$, die aus A hervorgeht, indem wir Zeile l durch Zeile k ersetzen. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 [A \cdot A^\#]_{k,l} &= \sum_j \tilde{a}_{kj} \cdot (-1)^{j+l} \det(\tilde{A}_{\#l,j}) \\
 &= \sum_j \tilde{a}_{lj} \cdot (-1)^{j+l} \det(\tilde{A}_{\#l,j}) \\
 &= \det(\tilde{A}) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{Laplace 8.10(a):} \\
 &\quad \text{Entwicklung nach Zeile } l \\
 &= 0 \\
 &\quad \text{8.4(D2)}
 \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt:

$$A \cdot A^\# = \det A \cdot \mathbb{1}_n$$

□