

K4: Universelle Eigenschaften

\mathcal{C} lokal kleine Kategorie, $A \in \text{ob } \mathcal{C}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -): \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets} \quad \text{weiterer Funktor}$$

1. Lemma: Jedes $a \in FA$ definiert eine natürliche Trafo

$$\alpha^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F$$

mittels

$$\alpha_B^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow FB$$

$$f \longmapsto (Ff)(a)$$

Beweis:

Für $\begin{array}{c} B \\ g \downarrow \\ C \end{array}$ erhalten wir

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{\alpha_B^a} & FB \\
 \downarrow g_* & & \downarrow Fg \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) & \xrightarrow{\alpha_C^a} & FC \\
 \downarrow g \circ f & & \downarrow F(g \circ f)
 \end{array}$$

$(Ff)(a)$
 \downarrow
 $(Fg)(Ff)(a)$
 \parallel
 $(F(g \circ f))(a)$

□

2. Notiz: Die Konstruktion lässt sich auch anwenden auf ein $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$ und liefert dann Trafo

$$\alpha^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \rightsquigarrow F$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, -)$$

3. Satz: Yoneda-Lemma

Für \mathcal{C}, A, F wie oben wie oben definiert

$$FA \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$

$$a \longmapsto \alpha^a$$

eine Bijektion.

Beweis:

Definiere

$$FA \longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$

$$\alpha_A(\text{id}_A) \longleftarrow \alpha$$

$$(\varrho = id): \quad \alpha_A^a(id_A) = (F(id_A))(a) = id_{FA}(a) = a$$

(G = id): Sei $a := \alpha_A(id_A)$.

Zu zeigen: $\alpha^a = \alpha$

Wähle dazu beliebiges $f: A \rightarrow B$ in \mathcal{C} und

rechne nach: $\alpha_B^a(f) = (Ff)(a)$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\alpha_A} & FA \\
 \downarrow f_* & & \downarrow Ff \\
 \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\alpha_B} & FB
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \nearrow \\
 = (Ff)(\alpha_A(id_A)) \\
 = \alpha_B(f_*(id_A)) \\
 = \alpha_B(f)
 \end{array}$$

□

4. Korollar: Yoneda-Einbettung „Prägarben auf \mathcal{C} “

Für jede lokal kleine Kategorie \mathcal{C} haben wir volltreue

Funktionen (a) $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \text{Sets})$
 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$

(b) $\gamma^*: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Sets})$
 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc}
 & z_1 & \text{Hom}(X, z_1) \\
 h \downarrow & & \downarrow h_* \\
 & z_2 & \text{Hom}(X, z_2)
 \end{array}$$

Beweis:

(a) & (b) äquivalent

Zu b: Für jedes $Y \xleftarrow{f} X$ in \mathcal{C} definiert f^*

natürliche Trafo $\gamma^*(Y) \xrightarrow{f^*} \gamma^*(X)$:

Explizit: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{(f^*)_Z} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$
 $g \mapsto g \circ f$

Das ist natürlich:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(Y, z_1) & \xrightarrow{(f^*)_{z_1}} & \text{Hom}(X, z_1) \\
 h_* \downarrow & & \downarrow h_* \\
 \text{Hom}(Y, z_2) & \xrightarrow{(f^*)_{z_2}} & \text{Hom}(X, z_2)
 \end{array}$$

für $h \downarrow$ erhalten wir

h_g $\xrightarrow{\quad}$ h_g ∘ f

Das definiert γ^* auf Morphismen.

Satz 3 liefert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, X) & & \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Sets})}(\gamma^*(Y), \gamma^*(X)) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\cong} & \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \end{array} \right\} \\ f & \mapsto & \alpha^f \end{array}$$

Hier war α^f definiert als:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_z^f: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ g & \mapsto & \begin{array}{l} g_*(f) \\ \parallel \\ g \circ f \\ \parallel \\ f^*(g) \\ \parallel \\ \gamma^*(f)(g) \end{array} \end{array} \quad \square$$

5. Anmerkung

Korollar 4 bedeutet insbesondere

(a) Ist $\gamma X_1 \cong \gamma X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.

Wir können also ein Objekt X in \mathcal{C} bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T \in \text{ob } \mathcal{C}$ alle Morphismen $T \rightarrow X$ festlegen.

(b) Ist $\gamma^* X_1 \cong \gamma^* X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.

Wir können also ein Objekt X in \mathcal{C} bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T \in \text{ob } \mathcal{C}$ alle Morphismen $X \rightarrow T$ festlegen.

6. Def.: Ein Funktor

$$F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets} \quad \text{bzw.} \quad F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$$

ist darstellbar, wenn er natürlich isomorph ist zu

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \quad \text{bzw.} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

für ein $A \in \text{ob } \mathcal{C}$. Eine Darstellung von F ist ein Paar (A, a) mit $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ und $a \in FA$ derart, dass die natürliche Trfo

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \xrightarrow{\alpha_a} F \quad \text{bzw.} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \xrightarrow{\alpha_a} F$$

ein Isomorphismus ist. Das Element a heißt dann universelles Element von F , und (A, a) hat die durch F definierte universelle Eigenschaft (\mathcal{U}).

Zwei Sichtweisen:

- Wir verstehen Funktoren $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ besser, wenn wir eine Darstellung für sie finden.
- Wir verstehen Objekte/Konstruktionen in \mathcal{C} besser, wenn wir sie durch eine \mathcal{U} beschreiben können (vgl. Anmerkung 5).

7. Notiz - vgl. Anmerkung 5

Stellen (A, a) und (B, b) denselben Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ dar / haben (A, a) und (B, b) dieselbe \mathcal{U} , so existiert (genau) ein Isomorphismus $f: A \xrightarrow{\cong} B$ mit $(Ff)(a) = b$.

Beweis: Betrachte

$$\begin{aligned} \alpha_B^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\xrightarrow{\cong} FB \ni b \\ \alpha_A^b: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) &\xrightarrow{\cong} FA \ni a \\ \alpha_A^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} FA \end{aligned}$$

Da α_B^0 Bijektion ist, $\exists!$ f mit $\alpha_B^0(f) = b$, also $(Ff)(a) = b$.

Da α_A^b Bijektion ist, $\exists!$ g mit $(Fg)(b) = a$.

Es ist

$$\alpha_A^a(g \circ f) = F(g \circ f)(a) = Fg(Ff(a)) = a$$

aber auch

$$\alpha_A^a(\text{id}_A) = a.$$

Also ist $g \circ f = \text{id}_A$.

Analog $f \circ g = \text{id}_B$. □

8. Beispiele

(a) Der vergessliche Funktor $U: \text{Groups} \rightarrow \text{Sets}$ wird dargestellt durch $(\mathbb{Z}, 1)$, denn ein Gruppenhomomorphismus $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ ist eindeutig festgelegt durch $f(1) \in G$.

$$\alpha_G^1: \text{Hom}_{\text{Groups}}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} UG$$
$$f \mapsto f(1)$$

Umgekehrt hat $(\mathbb{Z}, 1)$ die durch U definierte \underline{U} .

Ähnlich werden die folgenden vergesslichen Funktoren dargestellt:

$Ab \rightarrow$	Sets	durch	$(\mathbb{Z}, 1)$
$\text{Mod}_R \rightarrow$	Sets	durch	$(R, 1)$
$\text{Rings} \rightarrow$	Sets	durch	$(\mathbb{Z}[x], 1)$
$\text{Top} \rightarrow$	Sets	durch	$(*, *)$

(6) Der kontravariante Potenzmengenfunctor

$$\mathcal{P}^*: \text{Sets}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$$

$$\begin{array}{ccc} S & \mapsto & \mathcal{P}(S) \cong f^{-1}A \\ f \downarrow & & \uparrow \quad \quad \quad \mathbb{I} \\ S' & \mapsto & \mathcal{P}(S') \cong A \\ & & \hookleftarrow \mathcal{P}(\{0,1\}) \end{array}$$

wird dargestellt durch $(\{0,1\}, \{1\})$

$$\text{Hom}_{\text{Sets}}(S, \{0,1\}) \cong \mathcal{P}(S)$$

$$f \mapsto f^{-1}\{1\} = \mathcal{P}(f)(\{1\})$$

Umgekehrt hat $(\{0,1\}, \{1\})$ die durch \mathcal{P}^* def. \mathbb{I} .

9. Beispiel: Anfangs- und Endobjekte

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, 1) \cong F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$X \longmapsto *$$

↙ Endobjekt in \mathcal{C}

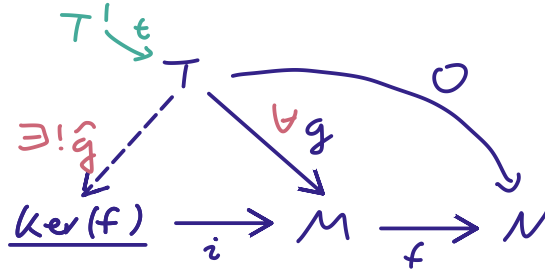
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, -) \cong F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$X \longmapsto *$$

↖ Anfangsobjekt

10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\ker(f)}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$, die folgende \mathcal{U} erfüllen:



Formal: Wähle $F: \text{Mod}_R^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc}
 T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_R(T, M) \mid f \circ g = 0\} \\
 \epsilon \downarrow & & \epsilon^* \uparrow \\
 T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_R(T', M) \mid f \circ g = 0\}
 \end{array}$$

Die \mathcal{U} besagt:

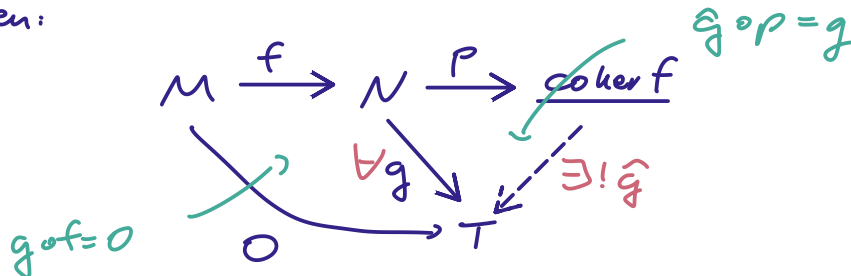
$$\begin{aligned}
 & \text{Hom}_R(-, \underline{\ker(f)}) \cong F \\
 \text{via} & \quad \text{Hom}_R(T, \underline{\ker(f)}) \xrightarrow{\cong} FT \\
 & \quad \hat{g} \mapsto F(\hat{g})(i) = \hat{g} \circ i
 \end{aligned}$$

Natürlich hat $\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ zusammen mit der kanonischen Inklusion $i: \ker f \rightarrow M$ diese \mathcal{U} .

(Aber auch $i': \ker f \rightarrow M$ hat diese \mathcal{U} .)

10b. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\text{coker } f}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $N \xrightarrow{p} \underline{\text{coker } f}$, die folgende \mathcal{U} erfüllen:



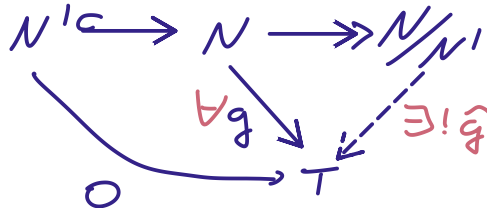
Formal: Wähle $F: \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Sets}$

$$\begin{aligned}
 T &\longmapsto \{g \in \text{Hom}_R(N, T) \mid g \circ f = 0\} \\
 t &\longmapsto t_*
 \end{aligned}$$

Natürlich hat $\text{coker } f := \frac{N}{F(M)}$ zusammen mit der

kanonischen Projektion $N \longrightarrow \frac{N}{F(M)}$ diese \mathcal{U} .

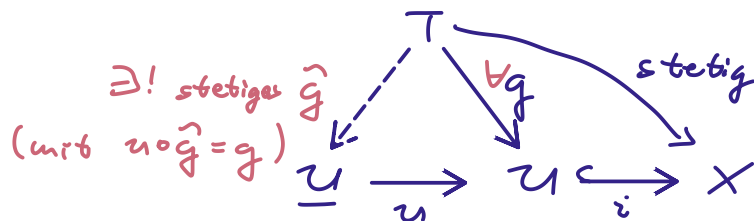
Ist f die Inklusion eines Untermoduls $N' \xrightarrow{f} N$ ergibt sich genau die \mathcal{U} des Quotienten $\frac{N}{N'}$ aus M1, Satz 11.



11a. Beispiel X top. Raum, $U \hookrightarrow X$ Teilmenge

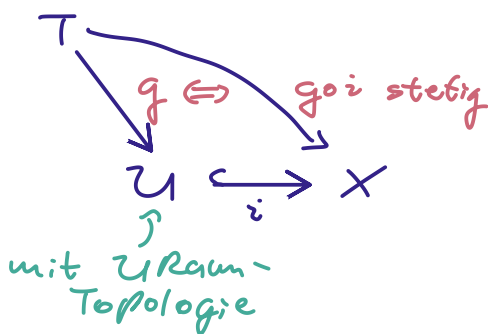
Der durch U definierte Unterraum ist ein top. Raum

\underline{U} zusammen mit einer Abb. $u: \underline{U} \rightarrow U$ derart, dass $i \circ u$ stetig und folgende \mathcal{U} erfüllt ist:



Wählen wir $T = *$, sehen wir: u ist Bijektion.

Um Existenz zu zeigen, wählen wir $\underline{U} = U$ mit Unterraumtopologie. Dann besagt \mathcal{U} :



(Formal: Wähle $F: \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc} T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(T, U) \mid i \circ g \text{ stetig} \} \\ \uparrow t & & \downarrow t^* \\ T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(T', U) \mid i \circ g \text{ stetig} \} \end{array}$$

Die \mathcal{U} sagt: $\text{Hom}_{\text{Top}}(-, \underline{U}) \cong F$

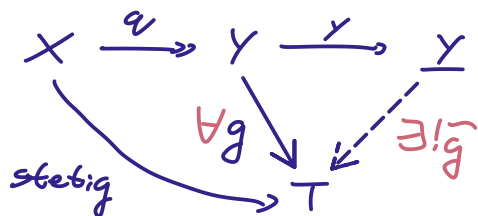
$$\begin{array}{ccc} \text{via } \text{Hom}_{\text{Top}}(T, \underline{U}) & \xrightarrow{\cong} & FT \\ g & \mapsto & (Fg)(u) = u \circ g \end{array}$$

$T \xrightarrow{g} \underline{U} \xrightarrow{u} U$

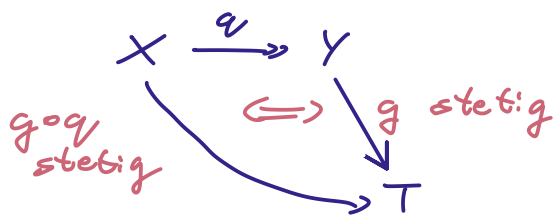
)

11.6. Beispiel: X top. Raum, $q: X \twoheadrightarrow Y$ Surjektion (in Sets)

Der durch q definierte Quotientenraum ist ein top. Raum \underline{Y} zusammen mit einer Abb. $\gamma: Y \rightarrow \underline{Y}$ d.h. $\gamma \circ q$ stetig und folgende \mathcal{U} erfüllt ist:



Für Existenz wähle Y mit Quotiententopologie (und $\gamma = id$). Dann sagt die \mathcal{U} :



(Formal: Wähle $F: \text{Top} \rightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc} T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, T) \mid g \circ q \text{ stetig} \} \\ \downarrow t & & \downarrow t_* \\ T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, T') \mid g \circ q \text{ stetig} \} \end{array}$$

Die \mathcal{U} sagt: $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{Y}, -) \cong F$
 via $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{Y}, T) \xrightarrow{\cong} FT$
 $g \mapsto (Fg)(\gamma) = g \circ \gamma$

)

12a. Bsp: Produkte

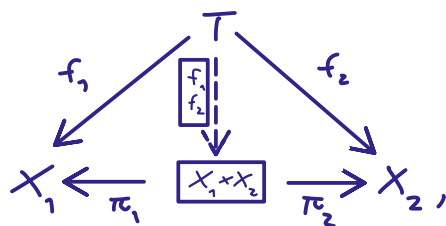
\mathcal{C} Kategorie, X_1 und X_2 zwei Objekte. Ein **Produkt** von X_1 und X_2 ist ein Objekt $\boxed{X_1 \times X_2}$ zusammen mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{\pi_1} \boxed{X_1 \times X_2} \xrightarrow{\pi_2} X_2,$$

die folgende \mathcal{U} erfüllen: Für jedes Objekt T mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} T \xrightarrow{f_2} X_2$$

existiert genau ein Morphismus $T \xrightarrow{\boxed{f_1, f_2}} \boxed{X_1 \times X_2}$ mit $\pi_i \circ \boxed{f_1, f_2} = f_i$ für $i=1,2$.



Formal: Wähle $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$

Die \mathcal{U} sagt: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \boxed{X_1 \times X_2}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_2)$
 via $f \mapsto (Ff)(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = \text{Set}$: $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \times X_2$ zusammen mit

kanonischen Projektionen hat diese \mathcal{U} .



$\mathcal{C} = \text{Ab}$: $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \oplus X_2 = \langle X_1 \times X_2 \text{ mit komponentenweiser Addition} \rangle$

zusammen mit kanonischen Projektionen hat diese \mathcal{U} .

$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann Gruppenhomomorphismus, wenn f_1 und f_2 es sind.

$\mathcal{G} = \text{Groups oder Rings oder Mod}_R$ - analog

$\mathcal{G} = \text{Top}$ $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \times X_2$ mit Produkttopologie hat diese \mathcal{U} :
In Produkttopologie ist (f_1) genau dann stetig,
wenn f_1 und f_2 stetig sind.

$\mathcal{G} = \text{Potenzmenge einer Menge } S, \text{ partiell geordnet mittels } \leq$
Ein Produkt zweier Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq S$ ist eine
Teilmenge $\boxed{X_1 \times X_2} \subseteq S$ zusammen mit Inklusionen
 $X_1 \supseteq \boxed{X_1 \times X_2} \subseteq X_2$ die folgende \mathcal{U} erfüllen:
Eine Teilmenge T ist genau dann in $\boxed{X_1 \times X_2}$ ent-
halten, wenn sie in X_1 und in X_2 enthalten ist.

$$\begin{array}{c} T \\ \forall \ni \exists \cap \ni \forall \\ X_1 \supseteq \boxed{X_1 \times X_2} \subseteq X_2 \end{array}$$

Also ist $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \cap X_2$ ein Produkt in \mathcal{G} .

$\mathcal{G} = (C, \leq)$ - eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Produkt von $x_1 \in C$ und $x_2 \in C$ ist
ein Element $\boxed{x_1 \times x_2} \in C$, für das gilt:

$$\boxed{x_1 \times x_2} \leq x_1 \text{ und } \boxed{x_1 \times x_2} \leq x_2 \text{ und}$$

$$(t \leq x_1 \text{ und } t \leq x_2 \Rightarrow t \leq \boxed{x_1 \times x_2}).$$

Das ist also ein Infimum von x_1 und x_2 .

Vorheriges Bsp. ist Spezialfall.

I. A. muss so ein Infimum nicht existieren
(z.B. wenn \leq triviale Halbordnung ist, in der
gar keine Elemente vergleichbar sind.)

12b. Bsp: Koprodukte

\mathcal{C} Kategorie, X_1 und X_2 zwei Objekte. Ein **Koprodukt** von X_1 und X_2 ist ein Objekt $X_1 \amalg X_2$ zusammen mit Morphismen

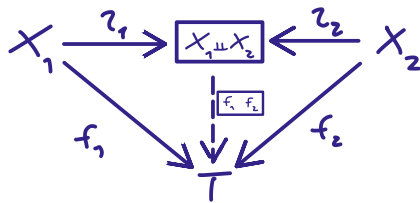
$$X_1 \xrightarrow{z_1} X_1 \amalg X_2 \xleftarrow{z_2} X_2,$$

die folgende \mathcal{U} erfüllen: Für jedes Objekt T mit Morphismen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} T \xleftarrow{f_2} X_2,$$

existiert genau ein Morphismus $X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{f_1, f_2} T$ mit $f_1, f_2 \circ z_i = f_i$

für $i=1,2$.



Formal: Wähle $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$

Die \mathcal{U} sagt: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \amalg X_2, -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -)$
 via $f \mapsto (Ff)(z_1, z_2) = (f \circ z_1, f \circ z_2)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = \text{Set}$: $X_1 \amalg X_2 =$ abstrakte disjunkte Vereinigung $X_1 \amalg X_2$
 $(\cong \{(x, 1) \mid x \in X_1\} \cup \{(x, 2) \mid x \in X_2\})$

zusammen mit kanonischen Inklusionen

$$z_i: X_i \longrightarrow X_1 \amalg X_2 \\ x \mapsto (x, i)$$

hat die geforderte \mathcal{U} :

$$\begin{array}{ccc} X_1 \amalg X_2 & (x, i) & \\ \downarrow \text{f}_1, \text{f}_2 & \downarrow & \\ T & \text{f}_i(x) & \end{array}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, f_1, f_2 zu definieren.

$\mathcal{C} = \text{Top}$ $\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 \amalg X_2$ mit Summentopologie hat diese \mathcal{U} :
 ($U \subseteq X_1 \amalg X_2$ offen $\Leftrightarrow U \cap X_1$ offen und $U \cap X_2$ offen)
 In dieser Topologie ist (f_1, f_2) genau dann stetig,
 wenn f_1 und f_2 stetig sind.

$\mathcal{C} = \text{Ab}$ $\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 \oplus X_2$ (definiert wie in 5a) zusammen mit

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \longrightarrow & X_1 \oplus X_2 \longleftarrow X_1 \\
 x & \mapsto & \begin{array}{l} (x, 0) \\ (0, x) \end{array} \longleftarrow x
 \end{array}$$

hat die geforderte \mathcal{U} :

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \oplus X_2 & (x_1, x_2) & (= (x_1, 0) + (0, x_2)) \\
 \boxed{f_1, f_2} \downarrow & \downarrow & \\
 T & f_1(x_1) + f_2(x_2) &
 \end{array}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit, $\boxed{f_1, f_2}$ als
 Gruppenhomomorphismus zu definieren.

$\mathcal{C} = \text{Mod}_R$ - analog

$\mathcal{C} = \text{Groups}$ $\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 * X_2$, das freie Produkt von X_1 und X_2 ,
 zusammen mit kanonischen Inklusionen $X_i \rightarrow X_1 * X_2$
 ist ein Koproduct.

$\mathcal{C} = \text{Potenzmenge einer Menge } S, \text{ partiell geordnet mittels } \leq$

$\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 \cup X_2$, die Vereinigung der Teilmengen,
 ist ein Koproduct

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \leq)$ - eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Koproduct von $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ ist ein Supremum
 von x_1, x_2 (wenn es existiert).