

2. Beispiele

$\mathbb{R} = \mathbb{Z}$ Jede abelsche Gruppe $(M, +)$ ist auf genau eine Weise ein \mathbb{Z} -Modul:

Skalarmultiplikation ist gegeben durch

$$M \times \mathbb{Z} \longrightarrow M$$
$$(m, z) \longmapsto \begin{cases} \underbrace{m + \dots + m}_z & \text{falls } z > 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \\ -(m + \dots + m) & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

Jeder Gruppenhomomorphismus zwischen ab.

Gruppen ist \mathbb{Z} -linear. Also:

$$\text{Mod}_{\mathbb{Z}} = \text{Ab}$$

\mathbb{R} ein Körper - Dann ist

$$\text{Mod}_{\mathbb{R}} = \text{Vec}_{\mathbb{R}}.$$

$\mathbb{R} = \mathbb{Z}/n$ Ein \mathbb{Z}/n -Modul ist dasselbe wie eine ab. Gruppe M , in der gilt:

$$\underbrace{m + \dots + m}_n = 0 \quad \forall m \in M$$

Zum Bsp. ist $\mathbb{Z}/20 \oplus \mathbb{Z}/5$ ein $\mathbb{Z}/20$ -Modul.

- \mathbb{R} selbst ist ein \mathbb{R} -Rechtsmodul via Multiplikation.
- $0 := \{0\}$ ist ein \mathbb{R} -Modul für jedes \mathbb{R} .

3. Def. & Satz: M ein R -Rechtsmodul

(a) Ein (R Rechts-) Untermodul $M' \subseteq M$ ist eine Untergruppe, auf die sich die Skalarmultiplikation einschränken lässt.

$$(m' \cdot a \in M' \quad \forall m' \in M', a \in R)$$

(b) Ist $M' \subseteq M$ ein Untermodul, so ist die Quotientengruppe M/M' wieder ein R -Rechtsmodul bzgl.

$$\begin{aligned} M/M' \times R &\longrightarrow M/M' \\ \bar{m} \cdot a &\longmapsto \overline{m \cdot a} \end{aligned}$$

M/M' heißt Quotientenmodul.

4. Beispiele

(a) Die R -Rechtsuntermoduln von R heißen Rechtsideale von R .

$$\begin{aligned} \text{Unterbsp.: } \{ \text{Ideale von } \mathbb{Z} \} &= \{ \text{Untergruppen von } \mathbb{Z} \} \\ &= \{ n \cdot \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}_0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \text{Ideale von } \mathbb{Z}/n \} &= \{ \text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/n \} \\ &= \{ k \cdot \mathbb{Z}/n \mid k \text{ ist Teiler von } n \} \end{aligned}$$

Unterbsp.: k Körper

$$\{ \text{Ideale von } k \} = \{ 0, k \}$$

$$\text{Unterbsp.: } \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\} \subseteq \text{Mat}_{2 \times 2}(k)$$

ist ein Rechtsideal

(b) Für jede R -rechtslineare Abb. $f: M \rightarrow N$
sind der Kern und das Bild Rechtsuntermoduln:

$$\ker(f) := \{ m \in M \mid f(m) = 0 \} \subseteq M$$

$$\operatorname{im}(f) := f(M) \subseteq N$$

Wir erhalten entsprechende Quotientenmoduln:

$$\operatorname{coker}(f) := \frac{N}{\operatorname{im}(f)}$$

$$(\& \operatorname{coim}(f) := \frac{M}{\ker(f)})$$

5. Def & Satz: M, N R -Rechtsmoduln

$\operatorname{Hom}_R(M, N)$ ($:= \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}_R}(M, N)$) ist eine
abelsche Gruppe via

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \quad \text{für } m \in M$$

Neutrales Element ist

$$0: M \longrightarrow N \\ m \mapsto 0$$

6. Notiz: Diese additive Struktur ist mit Komposition
verträglich.

$$(a) h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$$

$$(b) (f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

Daher erhalten wir auf Mod_R Funktoren

$$\operatorname{Hom}_R(M, -): \operatorname{Mod}_R \longrightarrow \operatorname{Ab}$$

$$\begin{array}{ccc} N & \mapsto & \operatorname{Hom}_R(M, N) \\ h \downarrow & & h_* \downarrow \\ N' & \mapsto & \operatorname{Hom}_R(M, N') \end{array} \quad h_*(f) = h \circ f$$

$$\operatorname{Hom}_R(-, N): \operatorname{Mod}_R \longrightarrow \operatorname{Ab}^{\operatorname{op}}$$

(a) sagt: h_* ist Gruppenhomomorphismus.

(b) sagt: h^* ist Gruppenhomomorphismus.)

7. Bemerkung: Für kommutatives R ist $\text{Hom}_R(M, N)$ sogar R -Modul, via
 $(f \cdot a)(m) := f(m \cdot a)$,
denn diese Abbildung ist dann R -linear.

8. Def.: Eine Sequenz von R -Modulhomomorphismen
 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$

ist exakt, wenn gilt: $\text{im}(f) = \text{ker}(g)$

Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0,$$

die an jeder Stelle exakt ist.

9. Notiz:

(a) Für Morphismen $i: M \rightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

- ① i injektiv
- ② i Mono
- ③ $(i \circ f = 0 \Rightarrow f = 0)$
- ④ $\ker(i) = 0$
- ⑤ $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N$ ist exakt.

(b) Für Morphismen $q: M \rightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

- ① q surjektiv
- ② q Epi
- ③ $(f \circ q = 0 \Rightarrow f = 0)$
- ④ $\text{coker}(q) = 0$
- ⑤ $M \xrightarrow{q} N \rightarrow 0$ ist exakt.

Beweis:

(a) ① \Leftrightarrow ②: wie in Ab

(Elemente $m \in M$ entsprechen 1:1
 R -Modulmorphismen $R \rightarrow M$
 $1 \mapsto m$)

① \Leftrightarrow ③, ③ \Leftrightarrow ④, ① \Rightarrow ② klar

② \Rightarrow ①: Ist $i \circ f = i \circ g$ in Mod_R , folgt
 $i \circ f - i \circ g = 0$, also
 $i \circ (f - g) = 0$.

Aus ② folgt nun $f - g = 0$, d.h. $f = g$.

(b) ähnlich

□

10. Satz: Fünfer-Lemma

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Seien} & 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \cong \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \cong & & \\ & 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

zwei kurze exakte Sequenzen in Mod_R , und f, g, h Morphismen in Mod_R darob, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Sind f und h Isomorphismen, so ist auch g ein Isomorphismus.

Allgemeiner:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Seien} & K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P \\ & \downarrow e & & \cong \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \cong & & \downarrow j \\ & K' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & P \end{array}$$

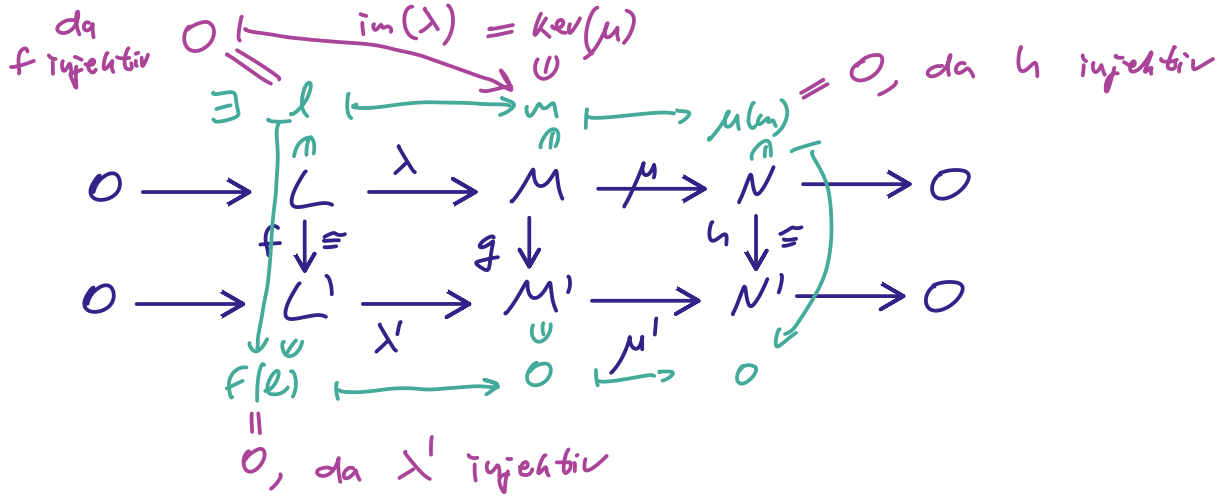
zwei exakte Sequenzen in Mod_R , und e, f, g, h, j Morphismen in Mod_R darob, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Ist

- e ein Epimorphismus und
- f ein Isomorphismus und
- h ein Isomorphismus und
- j ein Monomorphismus,

so ist g ein Isomorphismus.

Beweis: ganz unkategoriell: Wir zeigen durch Diagrammjagd, dass g bijektiv ist.

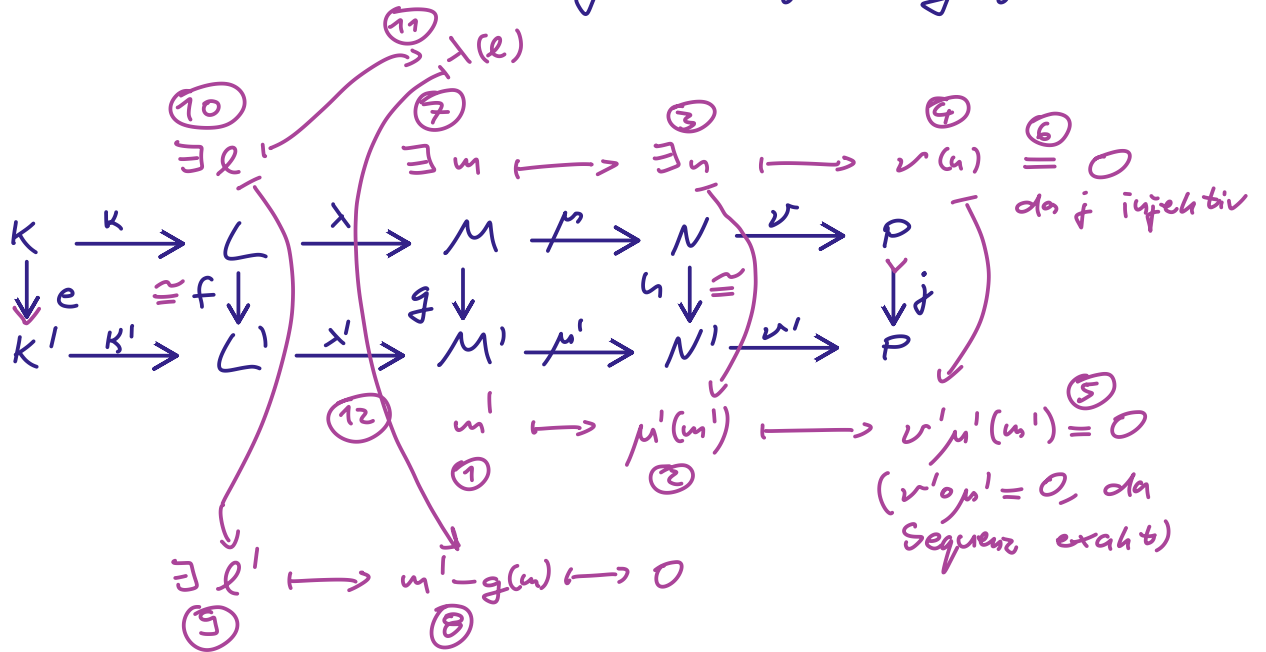
einfache Version; g injektiv:



Also $m = 0$.

allgemeine Version; g surjektiv:

Sei $m' \in M'$. Zu zeigen: $\exists m_0 \in M: g(m_0) = m'$



$g(\lambda(l)) = m' - g(m)$, also $g(\lambda(l) + m) = m'$.
 Wähle also m_0 .

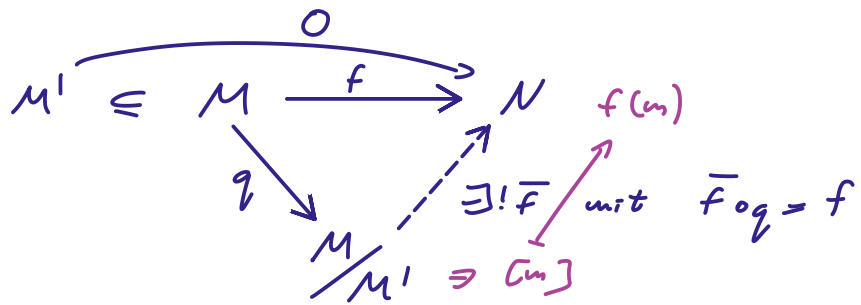
□

11. Satz: Universelle Eigenschaft des Quotienten

Sei $M' \subseteq M$ ein R -Rechtsuntermodul.

Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R mit $f(M') = 0$ existiert genau eine Faktorisierung durch die Quotientenabb.

$$q: M \rightarrow \frac{M}{M'}$$



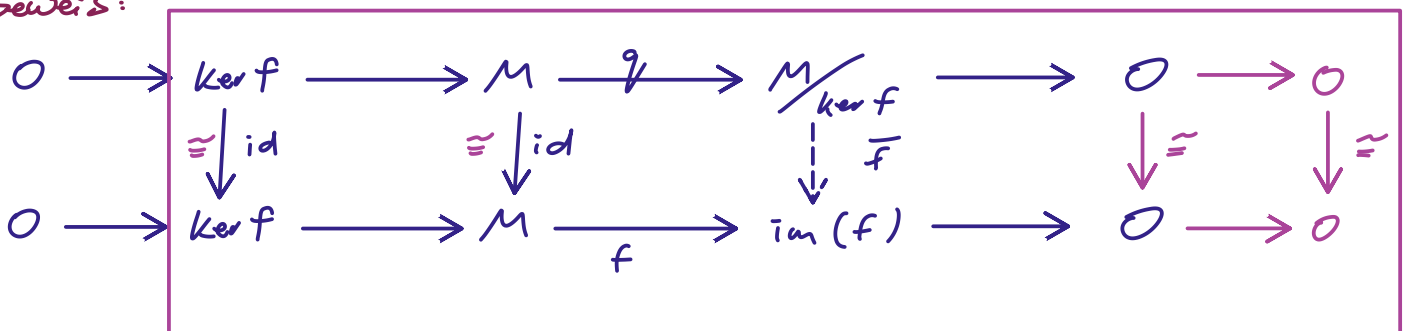
□

12. Korollar (Isomorphiesatz)

Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\frac{M}{\ker f} \xrightarrow{\bar{f}} \text{im}(f)$$

Beweis:



Aus Ser-Cemma folgt: \bar{f} ist Isomorphismus.

□