Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Wintersemester 2016/17
23.12.2016

Einführung in die Topologie
Blatt 10

---

37 | Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt:

Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle.

Beweisen Sie diesen Satz mit topologischen Mitteln, zum Beispiel wie folgt:

Sei f ein solches Polynom von Grad n, aufgefasst als (stetige) Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nehmen wir an, f besitze keine Nullstelle. Durch $\hat{f}(z) := f(z)/\|f(z)\|$ wird eine Selbstabbildung des Kreises definiert. Berechnen Sie $\deg(\hat{f})$ auf zwei Weisen:

(i) Da f keine Nullstelle im Inneren des Einheitskreises besitzt, lässt sich eine Homotopie von $\hat{f}$ zur konstanten Abbildung $f(0)/\|f(0)\|$ definieren.

(ii) Da f keine Nullstelle außerhalb des Einheitskreises besitzt, lässt sich eine Homotopie von $\hat{f}$ zur Abbildung $z \mapsto z^n$ definieren.

38 | Transliteration

Zeigen Sie, dass das freie Produkt zweier Gruppen G_1 und G_2 zusammen mit den kanonischen Inkusionen $i_1\colon G_1 \hookrightarrow G_1 * G_2 \hookleftarrow G_2 : i_2$ die universelle Eigenschaft des Koprodukts von G_1 und G_2 erfüllt: zu je zwei Gruppenhomomorphismen $t_1\colon G_1 \to T$ und $t_2\colon G_2 \to T$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $t\colon G_1 * G_2 \to T$ mit $ti_1 = t_1$ und $ti_2 = t_2$.

In der Vorlesung wurde ferner für jedes Diagramm $G_1 \leftarrow G \to G_2$ eine Quotientengruppe $(G_1 * G_2)/N(U)$ definiert. Zeigen Sie, dass diese Quotientengruppe zusammen mit den kanonischen Homomorphismen $G_1 \to (G_1 * G_2)/N(U) \leftarrow G_2$ die universelle Eigenschaft eines Pushouts erfüllt.

39 | Doppelschleife

Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines Produkts das Produkt der Fundamentalgruppen ist: für topologische Räume X und Y und Punkte $x \in X$, $y \in Y$ induzieren die Projektionen einen Gruppenisomorphismus:

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

★ Gruppenwanderung

Seien X und Y beliebige topologische Räume. In der Kategorie der Gruppoide gilt:

$$\Pi(X \times Y) \cong \Pi(X) \times \Pi(Y)$$
$$\Pi(X \sqcup Y) \cong \Pi(X) \sqcup \Pi(Y)$$

40 | Achterbahn
Berechnen Sie die Fundamentalgruppe der Figur Acht (aufgefasst als Unterraum von $\mathbb{R}^2$).

$$\infty$$

★ Weihnachtsstern
Herrenhuter Sterne haben zweckmäßigerweise eine Öffnung, durch die sich ein Leuchtmittel einfädeln lässt. Ferner befindet sich auf jeder Kante zwischen zwei Sternspitzen ein kleines Loch: der Stern wird an diesen Stellen jeweils durch eine Musterklammer zusammengehalten. Ignorieren wir für den Zweck dieser Aufgabe einmal die Musterklammern. Welche Fundamentalgruppe hat die Oberfläche des Sterns?

$$\bigstar$$