$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, dotted, "e"] \arrow[rrrr, bend left, "b"] \arrow[ddrr, bend right, "d"'] & & & & \\
& & X' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & Y' \arrow[r, "l"] \arrow[d, "i"] & Z' \arrow[d, "j"] \\
& & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Gegeben d, b, d.h., $j \circ b = g \circ f \circ d$

müssen wir $T \xrightarrow{e} X'$ konstruieren mit

$l \circ k \circ e = b$

und $h \circ e = d$

und zeigen dass es eindeutig mit diesen Eigenschaften ist.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "e"] \arrow[drr, bend left, "b"] \arrow[ddr, bend right, "d"'] & & \\
& X' \arrow[r, "l \circ k"] \arrow[d, "h"] & Z' \arrow[d, "j"] \\
& X \arrow[r, "g \circ f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Haben:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "c"] \arrow[drr, bend left, "b"] \arrow[ddr, bend right, "f \circ d"'] & & \\
& Y' \arrow[r, "l"] \arrow[d, "i"] & Z' \arrow[d, "j"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Da rechts Pullback steht, $\exists!\, c : T \to Y'$ mit $l \circ c = b$ $\boxtimes$

und $i \circ c = f \circ d$ ☆

Mit diesem c haben wir eine Testsituation für das linke Pullback:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "e"] \arrow[drr, bend left, "c"] \arrow[ddr, bend right, "d"'] & & \\
& X' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & Y' \arrow[d, "i"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Das äußere Diagramm kommutiert wegen ☆

Damit bekommen wir $T \xrightarrow{e} X'$ so daß $k \circ e = c$
(eindeutig) $h \circ e = d$
(weil linkes Pullback steht)

Müssen zeigen: $h \circ e = d$ ok ✓
und $l \circ k \circ e = b$

Wir haben aber: $l \circ \underline{k \circ e} = l \circ c \overset{\boxtimes}{=} b$

Noch zz: e ist eindeutig mit diesen Eigenschaften

Angenommen wir haben $\tilde{e} : T \to X'$ mit $h \circ \tilde{e} = d$ (*)
$l \circ k \circ \tilde{e} = b$. *

Wollen zeigen, als Hilfsschritt, dass $k \circ \tilde{e} = c$.
Nutze dazu die Eindeutigkeitsklausel für das rechte Pullback:

Es gelten: $l \circ (k \circ \tilde{e}) \overset{*}{=} b$
und $i \circ (k \circ \tilde{e}) = f \circ h \circ \tilde{e} \overset{(*)}{=} f \circ d$

} diese beiden Eigenschaften definieren das eindeutige c

da linker Pullback kommutiert

$\Longrightarrow \quad c = k \circ \tilde{e}$

Haben also $k \circ \tilde{e} = c$
und $h \circ \tilde{e} = d$

} diese beiden Eigenschaften, mit der Eindeutigkeitsklausel des linken Pullbacks, definieren e

$\Longrightarrow \quad \tilde{e} = e$