2. Konstruktionen I

Unterräume

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Raum, $X \subseteq Y$ Teilmenge

Was ist eine sinnvolle Top. auf X?

Sicherlich sollte $i: X \hookrightarrow Y$ stetig sein.

Also muss für jedes offene $V \subseteq Y$

$X \cap V$ offen sein in X.

1. Def.: Für $(Y, \mathcal{T}_Y)$, X wie oben ist die Unterraumtopologie auf X gegeben durch

$$\mathcal{T}_X := \{ V \cap X \mid V \in \mathcal{T}_Y \}.$$

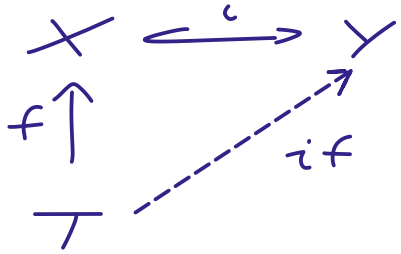
Das ist eine Topologie [...].

2. Satz: Die Unterraumtop. $\mathcal{T}_X$ hat die folgende universelle Eigenschaft (UE):

Eine Abb. $f: (T, \mathcal{T}_T) \to (X, \mathcal{T}_X)$ ist genau dann stetig, wenn

$i \circ f: (T, \mathcal{T}_T) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$

stetig ist.



Beweis:

($\Rightarrow$) Da i stetig ist nach Konstruktion der Unterraumtop., ist für jedes stetige f auch if stetig.

($\Leftarrow$) Sei $i f: T \longrightarrow Y$ stetig.
Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ex. offenes
$V \subseteq Y$ mit $U = V \cap X$.
Also ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}(V \cap X) \\ &= f^{-1}(i^{-1}(V)) \\ &= (if)^{-1}(V) \end{aligned}$$

offen in T. □

3. Bsp.: Sei $f: X \longrightarrow Y$ stetig,
$Bild(f) := f(X)$, ausgestattet mit
der Unterraumtop. bzgl. $f(X) \subseteq Y$.
Dann ist auch die eingeschränkte
Abb.

$$\begin{aligned} \hat{f}: X &\longrightarrow Bild(f) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

stetig, denn $i\hat{f} = f$ ist stetig.

4. Def.: Eine Einbettung ist eine stetige Injektion

$$(X, \mathcal{T}_X) \xhookrightarrow{i} (Y, \mathcal{T}_Y)$$

derart, dass $\mathcal{T}_X$ mit der von i und $\mathcal{T}_Y$ induzierten Unterraumtopologie übereinstimmt.

5. Notiz: Eine stetige Abb. $i: X \longrightarrow Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn ihre Einschränkung $X \longrightarrow Bild(i)$ ein Homöomorphismus ist.

Produkte

$(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume. Was ist eine sinnvolle Top. auf $X \times Y$? Sicherlich sollen

$$X \xleftarrow[pr_X]{} X \times Y \xrightarrow[pr_Y]{} Y$$
$$x \quad \longleftarrow \quad (x,y) \quad \longmapsto \quad y$$

stetig sein. Also müssen

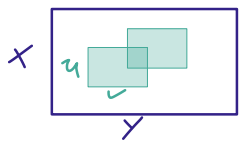
$$pr_X^{-1}(U) = U \times Y$$
$$pr_Y^{-1}(V) = X \times V$$

offen sein für alle offenen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$.
Also muss auch jedes offene Rechteck, d.h. jede Teilmenge der Form

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$$

für offenes $U \subseteq X$ und offenes $V \subseteq Y$, offen sein.

⚠ Diese Mengen definieren noch keine Top. auf $X \times Y$ — Vereinigungsaxiom scheitert



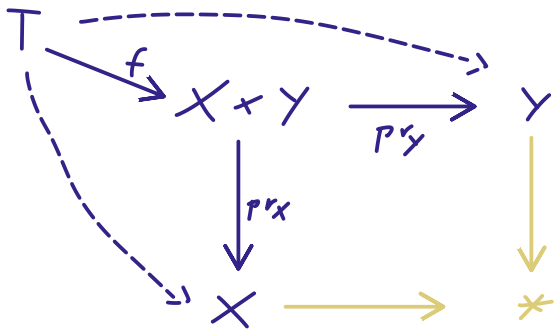
6. Def.: In der Produkttopologie auf $X \times Y$ ist eine Menge g.d. offen, wenn sie mit jedem Punkt auch ein offenes Rechteck um diesen Punkt enthält.

$$\mathcal{T}_{X\times Y} := \left\{ W \subseteq X \times Y \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall (x,y) \in W \\ \exists\, U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y : \\ (x,y) \in U \times V \subseteq W \end{array} \right\}$$

Im Folgenden schreiben wir kurz „$X \times Y$" für $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$.

7. Satz: $\in$ der Produkttopologie

Eine Abbildung $T \xrightarrow{f} X \times Y$ ist genau dann stetig, wenn $pr_X f$ und $pr_Y f$ stetig sind.



Beweis:

($\Rightarrow$) Die Konstruktion der Produkttop. garantiert, dass pr_X und pr_Y stetig sind.

($\Leftarrow$) Seien $pr_X f$ und $pr_Y f$ stetig.

Für ein offenes Rechteck $U \times V$ ist dann

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}\left(pr_X^{-1}(U) \cap pr_Y^{-1}(V)\right) \\ &= f^{-1} pr_X^{-1}(U) \cap f^{-1} pr_Y^{-1}(V) \\ &= (pr_X f)^{-1}(U) \cap (pr_Y f)^{-1}(V) \end{aligned}$$

offen. Urbilder beliebiger offener Mengen sind offen, da f^{-1} mit $\bigcup$ vertauscht. $\square$

8. Notiz: Der Satz zeigt:

$$Top(T, X \times Y) \cong Top(T, X) \times Top(T, Y)$$

– eine stetige Abb. nach $X \times Y$ ist „dasselbe" wie eine stetige Abb. nach X zusammen mit einer stetigen Abb. nach Y.

Pullback / Faserprodukt

9. Def.: Seien $X \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} Y$ stetig.
Das Pullback von f und g ist

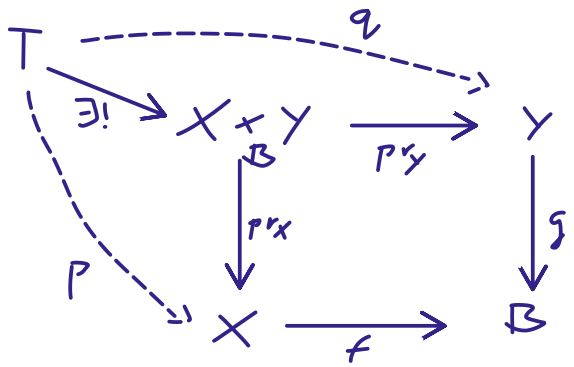
$$X \times_B Y := \{ (x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \},$$

als top. Raum aufgefasst als Unterraum des Produkt.

10. Satz: UE des Pullbacks
Seien $X \xleftarrow{p} T \xrightarrow{q} Y$ stetig mit $fp = gq$.
Dann gibt es genau eine stetige Abb.

$$(p,q): T \longrightarrow X \times_B Y$$

mit $pr_X(p,q) = p$ und $pr_Y(p,q) = q$.



Beweis: Die Abb. (p,q) ist notwendigerweise gegeben durch $t \mapsto (p(t), q(t))$. Sie ist stetig, da p & q stetig sind.
(Verwende die UE aus den Sätzen 2 & 7.) □

11. Beispiele:

- Für $B = *$ (Einpunktraum) ist
$$X \times_* Y = X \times Y$$
- Für $X = \{b\}$ für ein $b \in B$, f Inklusion $\{b\} \hookrightarrow B$ ist
$$\{b\} \times_B Y \cong g^{-1}(b)$$

Allgemeiner ist die Fasern von $X \times_B Y \longrightarrow X$ über $x \in X$ gerade $g^{-1}(f(x))$.

$$\begin{array}{ccccc} g^{-1}(fx) & \longrightarrow & X \times_B Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{x\} & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

"Transitivität von Pullbacks"

Summen / Koprodukte



Sei $(X_j, j \in J)$ eine Familie top. Räume.

12. Def.: Das Koprodukt der Räume X_j ist die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{j \in J} X_j := \{(x, j) \mid j \in J, x \in X_j\}$$

zusammen mit folgender Topologie:
eine Teilmenge von $\coprod_j X_j$ ist genau dann offen, wenn sie von der Form

$$\coprod_j U_j$$

für offene Mengen $U_j \subseteq X_j$ ist.
(Das ist eine Topologie [...].)

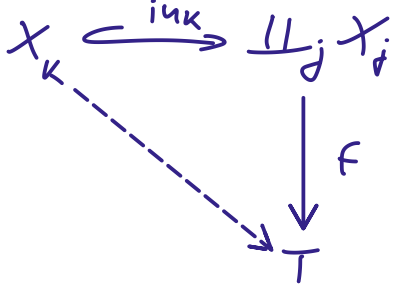
Für jedes $k \in J$ haben wir eine kanonische Inklusion

$$in_k : X_k \longrightarrow \coprod_j X_j, \quad x \longmapsto (x, k)$$

In der Topologie auf dem Koprodukt ist eine Menge $U \subseteq \coprod_j X_j$ genau dann offen, wenn $in_k^{-1}(U) \subseteq X_k$ offen ist für jedes k.
Insbesondere sind diese Inklusionen stetig.

13. Satz (UE der Koprodukttopologie):

Eine Abb. $f: \coprod_j X_j \longrightarrow T$ ist genau dann stetig, wenn alle Einschränkungen $f \circ in_k$ stetig sind.



Beweis:

($\Rightarrow$) folgt, da alle in_k stetig sind

($\Leftarrow$) Ist $U \subseteq T$ offen, so ist

$$f^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} in_k^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$$
$$= \coprod_{j \in J} (f \circ in_k)^{-1}(U)$$

□

Quotientenräume (dual zu Unterräumen)

$(X, \mathcal{T}_X)$ top. Raum

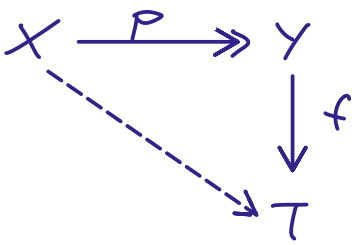
$X \xrightarrow{p} Y$ Surjektion von Mengen

14. Def.: Die von $\mathcal{T}_X$ und p definierte Quotiententopologie auf Y ist gegeben durch

$$\mathcal{T}_Y := \{ U \subseteq Y \mid p^{-1}U \in \mathcal{T}_X \}.$$

(Sie ist gerade so gemacht, dass p stetig ist.)

15. Satz (UE der Quotiententopologie):
Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, Y, p wie oben; $(T, \mathcal{T}_T)$ top. Raum. Eine Abb. $f: (Y, \mathcal{T}_Y) \longrightarrow (T, \mathcal{T}_T)$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ p$ stetig ist.



Beweis:

($\Rightarrow$) ✓

($\Leftarrow$) Sei fp stetig, $V \subseteq T$ offen. Dann ist

$$(fp)^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V)) \quad \text{offen in } X.$$

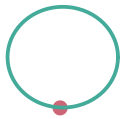
Das heißt gerade: $f^{-1}(V)$ offen in Quotiententop. □

16. Beispiele:

- $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$



$I/_{0\sim 1}$

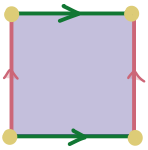


$\cong S^1$ für $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$?

- $Q := [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x,0) \sim (x,1)$, $(0,y) \sim (1,y)$

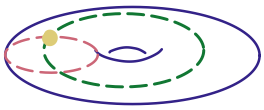
erzeugt eine Äquivalenzrelation $\approx$

Q:



p

$Q/_{\approx}$:



$\cong S^1 \times S^1$?

17. Def.: Eine Identifizierung ist eine stetige Surjektion $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{p} \!\!\!\!\rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, sodass $\mathcal{T}_Y$ mit der von $\mathcal{T}_X$ und p induzierten Quotiententop. übereinstimmt.

18. Notiz: Eine stetige Surjektion $X \xrightarrow{p} \!\!\!\!\rightarrow Y$ ist genau dann eine Identifizierung, wenn gilt:

$V \subseteq Y$ offen $\Leftrightarrow$ $p^{-1}V \subseteq X$ offen

Das ist g.d. der Fall, wenn gilt:

$V \subseteq Y$ abg. $\Leftrightarrow$ $p^{-1}V \subseteq X$ abg.

19. Satz: Jede offene oder abgeschl. stetige Surjektion ist eine Identifizierung (aber nicht umgekehrt)

Beweis: Sei $p: X \to Y$ offen, stetig, surj. Für offenes $V \subseteq Y$ ist $p^{-1}V$ offen, da p stetig ist. Ist umgekehrt $p^{-1}V$ offen, so ist $p(p^{-1}(V))$ offen, da p offen, und $p(p^{-1}(V)) = V$, da p surjektiv.
(Falls p abgeschlossen: analog.) □

20. Beispiel:

$$p: \mathbb{R} \twoheadrightarrow \{+,-\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} + & , x \geq 0 \\ - & , x < 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ mit gewöhnlicher Top.
$\{+,-\}$ mit Quotiententop: offen sind

$$\emptyset, \{-\}, \{+,-\}$$

$p((0,1)) = \{+\}$ — p nicht offen
(offen; nicht offen)

$p([-2,-1]) = \{-\}$ — p nicht abg.
(abg.; nicht abg.)

Also ist p eine Identifizierung, die weder offen noch abg. ist.

Pushout/Amalgam (dual zum Pullback)

21. Def.: Seien $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$ stetig.
Das Pushout von f und g ist

$$X \amalg_A Y := \frac{X \amalg Y}{\approx},$$

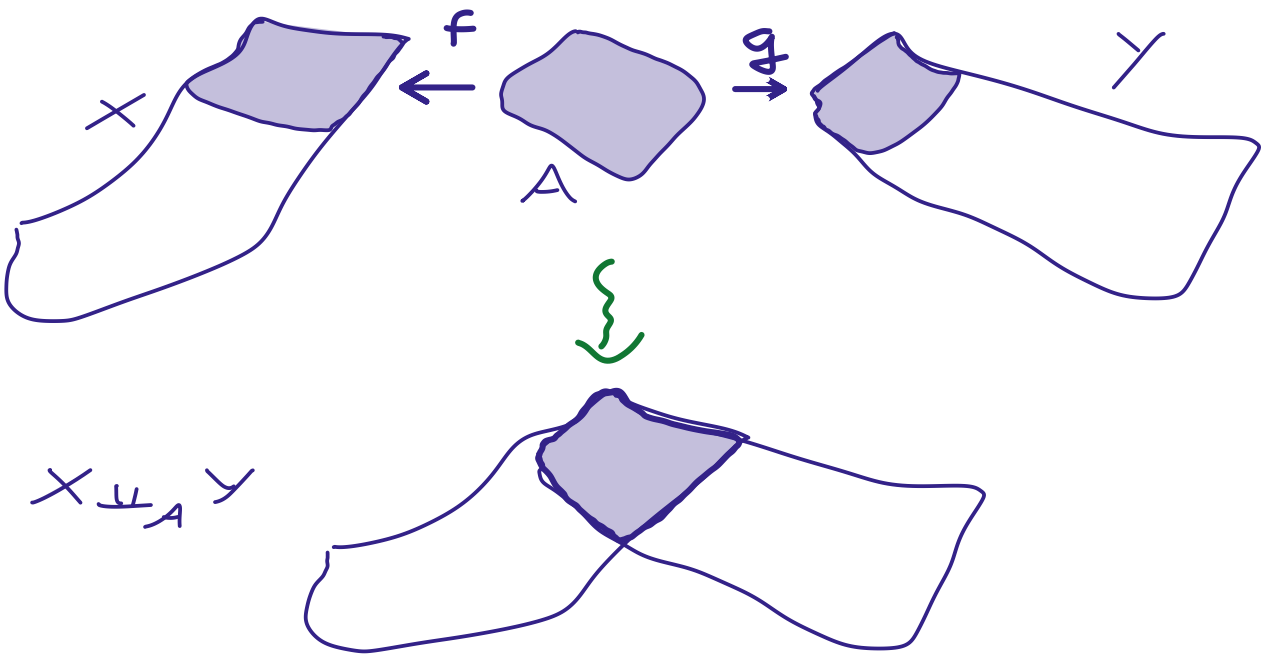
wobei $\approx$ die von der Relation
$f(a) \sim g(a)$ für alle $a \in A$
erzeugte Äquivalenzrelation ist.

(Da $\sim$ keine Äquivalenzrelation ist,
machen wir sie zunächst reflexiv
symmetrisch:

$$v \approx w :\Leftrightarrow \begin{array}{l} v = w \\ \text{oder } (v = fa \text{ und } w = ga \text{ für ein } a \in A) \\ \text{oder } (v = ga \text{ und } w = fa \text{ für ein } a \in A) \end{array}$$

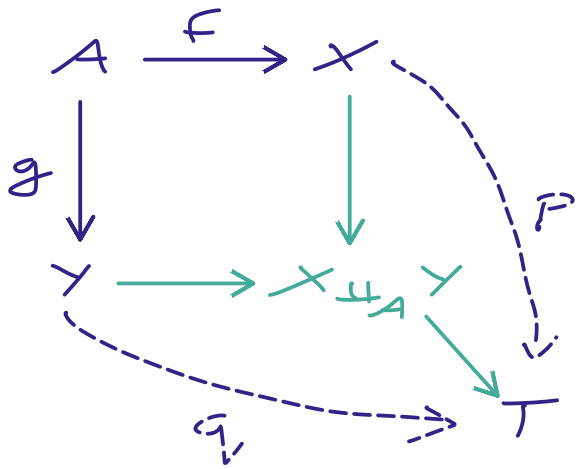
$\approx$ ist der transitive Abschluss von $\approx$:

$$v \approx w :\Leftrightarrow v \approx v_1 \approx v_2 \approx \dots \approx v_n \approx w$$
für gewisse endlich viele v_i)



22. Satz (UE des Pushouts)

Seien $X \xrightarrow{p} T \xleftarrow{q} Y$ stetige Abb. mit $pf = qg$. Dann gibt es genau eine stetige Abb. $X \amalg_A Y \longrightarrow T$, für die folgendes Diagramm kommutiert:



Beweis: Ganz analog (dual) zum Beweis der UE des Pullbacks. □

23. Beispiele/Spezialfälle

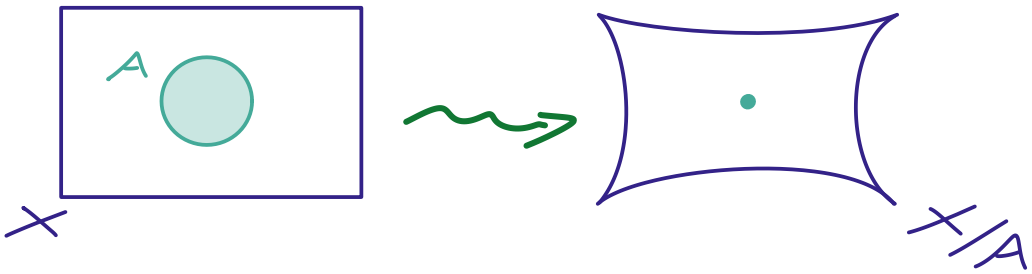
① Für $A = \emptyset$ ist $X \amalg_\emptyset Y = X \amalg Y$.

② $A \longrightarrow X$

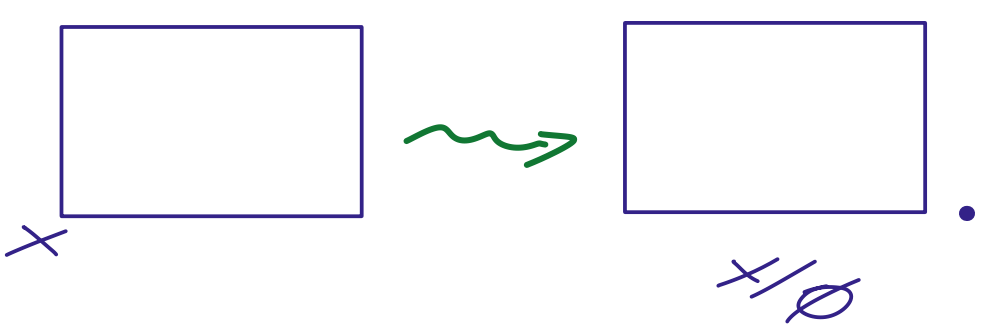
$\downarrow \qquad \downarrow$

$* \longrightarrow X/A$

Zusammenschlagen von A zu einem Punkt



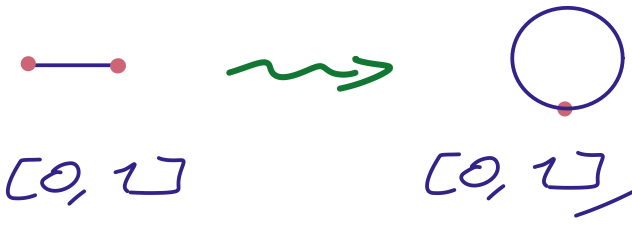
⚠ $X/\emptyset = X \amalg *$



Für $A \neq \emptyset$ besagt die Eigenschaft gerade:

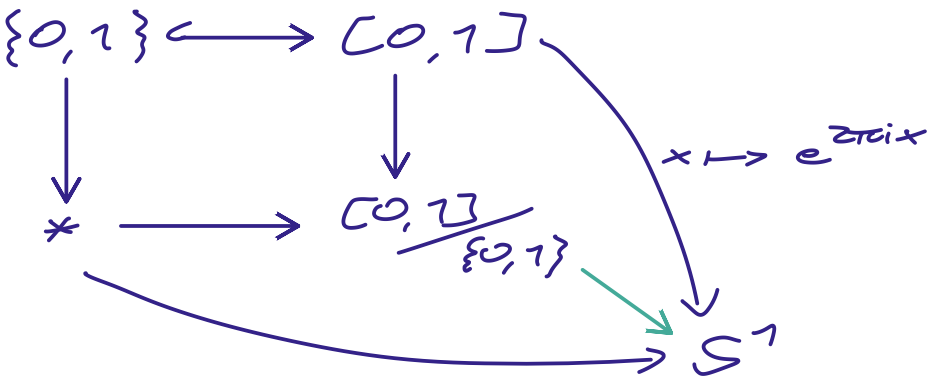
Eine st. Abb. $X/A \longrightarrow T$ ist dasselbe wie eine st. Abb. $X \longrightarrow T$, die auf A konstant ist.

Unterbeispiele:

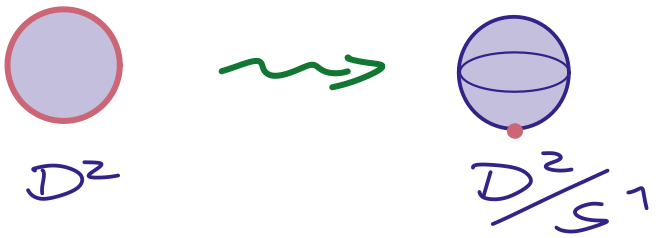
- 

$[0,1]$ $\qquad$ $[0,1]/\{0,1\}$

Ist das Homöomorph zu $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$?
Die UE gibt uns sofort eine stetige Abb.:



Leicht zu sehen: Das ist eine stetige Bijektion.
Mehr Arbeit: Das ist ein Homöom.

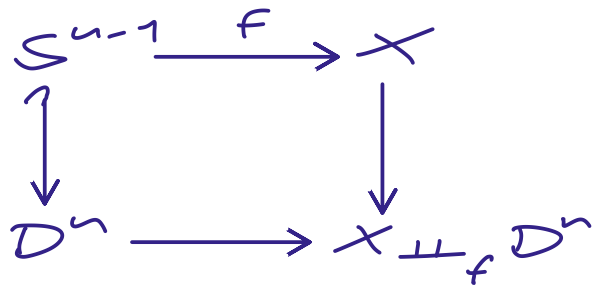
- 

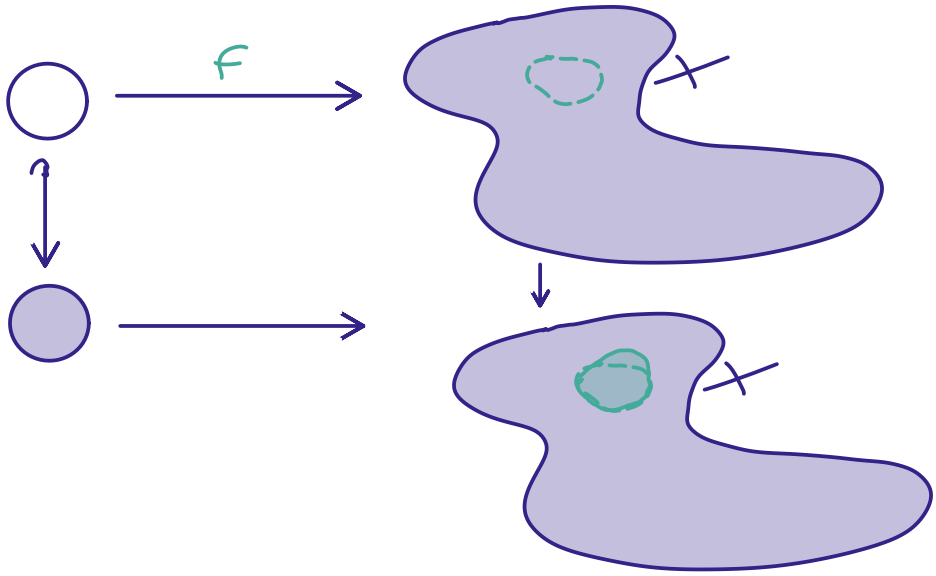
D^2 $\qquad$ D^2/S^1

(Ist das S^2 ?)

- $D^n/S^{n-1} \cong S^n$?

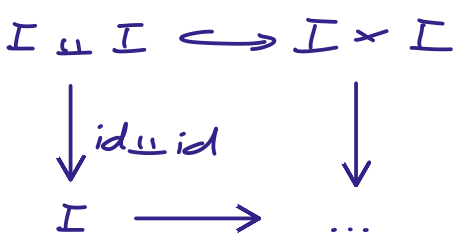
③ Anheften einer Zelle

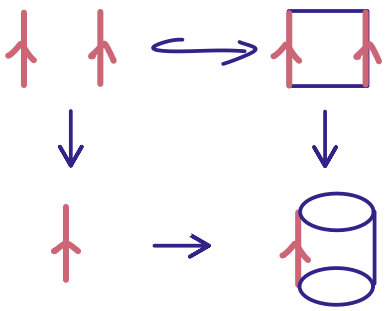


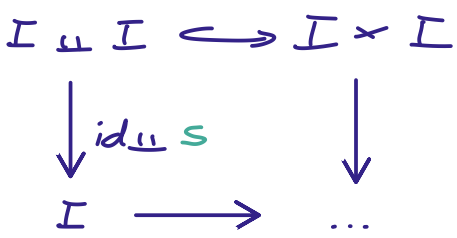


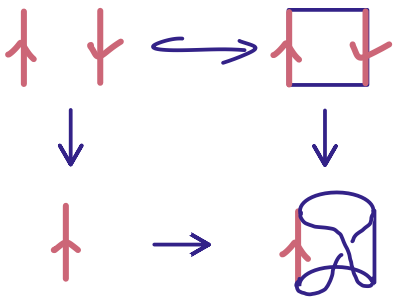
④ Stirnband & Möbiusband

$I := [0,1]$









$s: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & 1-x \end{array}$