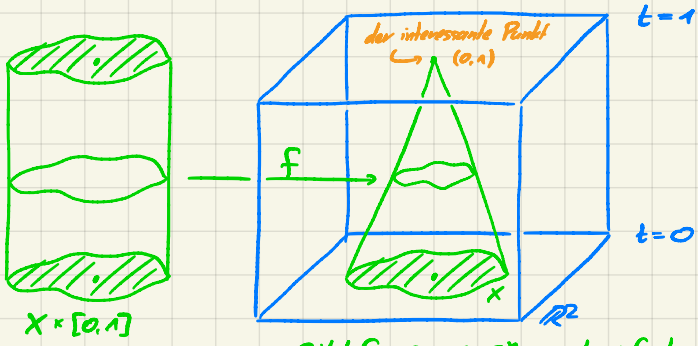
5) $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: X \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $(x,t) \mapsto ((1-t)x, t)$

Wahr oder falsch: $X \times [0,1] \xrightarrow{f} \text{Bild}(f)$ Identifizierung



„Bild für $0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, sonst einfach schief"

Falsch!

f ist Identifizierung $\Leftrightarrow$ X kompakt

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ohne Häufungspunkt in X und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1)$ mit $t_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $(1-t_n)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

x_n unbeschr. $t_n = 1 - \frac{1}{1+\|x_n\|}$

x_n beschr. $t_n = 1 - \min\{1, \|x-x_n\|\}$

↳ wähle konv. Teilfolge mit $\lim x_n = x \in \mathbb{R}^n \setminus X$

Betrachte $A = \{(x_n, t_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \times [0,1]$. A ist abgeschlossen

Komplement A^c ist offen

- $A \cap X \times [0,\varepsilon)$ ist diskret für $\varepsilon \in [0,1)$
- $(x,1) \in X \times [0,1]$, x ist kein Häufungspunkt von x_n d.h. $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_n \mid \|x_n - x\| < \varepsilon\}$ endlich $B_\varepsilon(x) \times (\delta, 1] \in A^c$ offen mit $\delta \in (\max_{\|x_n - x\| < \varepsilon} t_n, 1)$

Da $\underbrace{A \subseteq X \times [0,1)}_{\text{hier ist f ein Homöom. (Umkehrabbildung ist } (x,t) \mapsto (\frac{1}{1-t}x, t))}$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ abgeschlossen,

aber $f(A)$ ist nicht abgeschlossen in $\text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (jede Umgebung von $(0,1) \notin f(A)$ enthält ein $\underbrace{f(x_n, t_n)}_{=((1-t_n)x_n, t_n)}$, damit ist $f(A)^c$ nicht offen!)

$\Rightarrow$ f ist keine Identifizierung!

[Konkretes Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $x_n = n$, $t_n = 1 - \frac{1}{n^2}$, $f((x_n, t_n)) = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n^2})$

Ist X kompakt, so ist auch $X \times [0,1]$ kompakt

$f: X \times [0,1] \to \text{Bild}(f)$ ist stetige surjektive Abb. von einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum, also abgeschlossen

$\Rightarrow$ f ist eine Identifizierung