

Einführung in die Topologie

Blatt 0

1 | Offen oder abgeschlossen?

Hier sollen einige Beispiele für offene und abgeschlossener Mengen betrachtet werden.

- (a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind bezüglich der euklidischen Metrik offen, welche sind abgeschlossen?

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \leq 1/2\} \subseteq \mathbb{R} & D &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) > \pi\} \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

- (b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass ein beliebiger Schnitt offener Teilmengen eines metrischen Raumes nicht notwendigerweise offen ist.

2 | Abschlussball

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ sei $U(x, \varepsilon)$ die ε -Umgebung um x .

- (a) Wahr oder falsch: $\overline{U(x, \varepsilon)} = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

3 | Metrische Räume

Hier sollen einige Beispiele für metrische Räume betrachtet werden.

- (a) Auf $\mathbb{R}^n$ sind zwei Metriken gegeben durch d_2 (euklidische Metrik) und d_∞ (Supremumsmetrik). Zeigen Sie, dass beide Metriken dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}^n$ induzieren.
- (b) Auf der Menge $C([0, 1])$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ sind zwei Metriken gegeben durch

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

Zeigen Sie, dass die beiden Metriken nicht dieselbe Topologie auf $C[0, 1]$ induzieren.

- (c) Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir die Britische Eisenbahnmeterik durch

$$d_R(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ d_2(x, 0) + d_2(y, 0) & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Beschreiben Sie die offenen Bälle des $\mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Metrik. Was sind die konvergenten Folgen bezüglich dieser Metrik?

(Was sind die offenen Mengen bezüglich dieser Metrik?)

- (d) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{Z}$ die p -adische Metrik durch

$$d(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n \\ 1/p^r & \text{falls } m \neq n, \text{ wobei } r = \max\{s \in \mathbb{N} \text{ so dass } p^s \mid (m - n)\} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dies eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ definiert. Zeigen Sie außerdem, dass die Folge 2016, 20016, 200016, ... bezüglich der 2-adischen Metrik konvergiert.

(Ist dies eine alte Aufgabe, bei der ich zu faul war die Jahreszahl zu ändern, oder geht das nur für 2016?)

4 | Topologien

Hier sollen einige Beispiele für topologische Räume betrachtet werden.

- (a) Welche der folgenden Mengensysteme $\mathcal{U}$ definiert eine Topologie auf der Menge X ?
- (i) $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$
 - (ii) $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{U} = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \text{ ist endlich}\}$
 - (iii) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{(a, \infty) \subseteq \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}\}$
- (b) Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$ bezüglich der in (iii) auf $\mathbb{R}$ definierten Topologie stetig?
- (c) Ist die Funktion $g(x) = 1/(1 + x^2)$ bezüglich der in (iii) auf $\mathbb{R}$ definierten Topologie stetig?
-