

Einführung in die Topologie

Blatt 1

1 | Stegreiffragen: Topologien

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wie viele Topologien gibt es auf einer einelementigen Menge?
- (b) Wie viele Topologien gibt es auf einer zweielementigen Menge?
- (c) Wie viele Topologien gibt es auf einer dreielementigen Menge?
- (d) Wahr oder falsch: Jede Menge X kann mit einer Topologie $\mathcal{T}_X$ auf X ausgestattet werden, sodass jede Abbildung $f: Y \rightarrow X$ aus einem topologischen Raum Y stetig ist.
- (e) Wahr oder falsch: Jede Menge X kann mit einer Topologie $\mathcal{T}_X$ auf X ausgestattet werden, sodass jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einen topologischen Raum Y stetig ist.
- (f) Was bedeutet es, wenn die Identität $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ stetig ist?
- (g) Wahr oder falsch: Für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist auch $\{U \subseteq X \mid U^c \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie.
- (h) Wahr oder falsch: Für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist auch $\mathcal{T}^c \cup \{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Topologie.

2 | Entknüpft

Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

- (a) Wahr oder falsch: f und $g \circ f$ stetig impliziert g stetig.
- (b) Wahr oder falsch: g und $g \circ f$ stetig impliziert f stetig.

3 | Abstand

Für jeden Punkt p eines metrischen Raumes (X, d) hat man eine Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, p)$.

- (a) Wahr oder falsch: Die Abbildung ist stetig.

4 | Konsistenztest

Sei X Teilmenge eines metrischen Raumes (Y, d) .

- (a) Zeigen Sie, dass $(X, d|_X)$ durch Einschränkung der Metrik ein metrischer Raum ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die zugehörige Topologie auf X die Unterraumtopologie ist.

5 | Quadratur des Kreises

Auch wenn das in der Algebra nicht möglich ist, in der Topologie geht das.

- (a) Zeigen Sie, dass der Kreis $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ zum Quadrat $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$ homöomorph ist.
-