Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf **Winter 2026/27**
Marcus Zibrowius 06.11.2026
Jan Hennig

Einführung in die Topologie
Blatt 3

---

1 | Stegreiffragen: Zusammenhang und Hausdorff
Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Beschreiben Sie alle endlichen, zusammenhängenden Hausdorff-Räume.
(b) Beschreiben Sie die zusammenhängenden Mengen bzgl. der koendlichen Topologie auf $\mathbb{N}$.

2 | Verklebung
Seien X und Y topologische Räume. Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von X mit stetigen Abbildungen $f_i\colon X_i \to Y$ sodass $f_i|_{X_i\cap X_j} = f_j|_{X_i\cap X_j}, \quad \forall i,j \in I : X_i \cap X_j \neq \emptyset$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f|_{X_i} = f_i$ für alle $i \in I$ gibt, falls
  (i) $X_i \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ und I beliebig ist.
  (ii) $X_i \subseteq X$ abgeschlossen für alle $i \in I$ und I endlich ist.
(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für (ii), falls I nicht endlich ist.
(c) Finden Sie ein Gegenbeispiel im Fall $I = \{1, 2\}$ und X_i beliebig.

3 | Vererbung
Ziel dieser Aufgabe ist es zu sehen, wie sich die Hausdorff-Eigenschaft mit Konstruktionen verhält.

(a) Zeigen Sie, dass Summen/Teilräume/(Faser-)Produkte von Hausdorff-Räumen hausdorffsch sind.

4 | Einsiedler
Ziel dieser Aufgabe ist es „T_2 (Hausdorff) $\Rightarrow T_1$“ zu zeigen.

(a) Sei X hausdorffsch und $x \in X$. Zeigen Sie, dass $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen ist.
(b) Wahr oder falsch: Die Umkehrung von (a) gilt auch.

5 | Globalisierungsgegner
Ziel dieser Aufgabe zu sehen, ob „lokal-zusammenhängend“/„lokal-hausdorffsch“ auch zusammenhängend/hausdorffsch impliziert.

(a) Wahr oder falsch: Wenn jeder Punkt eines Raumes eine zusammenhängende Umgebung besitzt, so ist der gesamte Raum zusammenhängend.
(b) Wahr oder falsch: Wenn jeder Punkt eines Raumes eine hausdorffsche Umgebung besitzt, so ist der gesamte Raum hausdorffsch.

★ Niemals nicht verdreht. Nirgends.
Sei $C = [0,1]^2/(x,0) \sim (x,1)$ ein Zylinder und $M = [0,1]^2/(x,0) \sim (1-x,1)$ das Möbiusband.

(a) Zeigen Sie, dass C und M nicht homöomorph zueinander sind.
(Hinweis: Warum steht diese Aufgabe auf diesem Zettel?)
