Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf **Winter 2026/27**
Marcus Zibrowius 13.11.2026
Jan Hennig

Einführung in die Topologie
Blatt 4

---

1 | Stegreiffragen: Häufungspunkte und unendliche Produkte

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Jede Folge in einem kompakten Raum hat mindestens einen Häufungspunkt.
(b) Finden Sie eine Folge mit zwei Grenzwerten (vgl. Aufgabe 2).
(c) Sei $X = \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ und $A = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid x_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie den Abschluss von A in X bezüglich
   (i) der Produkttopologie auf X.
   (ii) der von Rechtecken, $\prod_{j\in\mathbb{N}} U_n$ mit $U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen, erzeugten Topologie auf X.

2 | Vollbremsung

Seien $N := \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\right\}$ und $N_0 := N \cup \{0\}$ Teilräume von $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass N diskret und N_0 kompakt ist.
(b) Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $a\colon N \to X$ in einen Hausdorff-Raum X höchstens eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $a_0\colon N_0 \to X$ besitzt.

Man nennt $a_0(0)$ dann den Grenzwert von a.

3 | i-Tüpfel

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen kompakten Hausdorff-Räumen, die über einem Punkt $q \in Y$ eine einpunktige Faser $f^{-1}(\{q\}) = \{p\}$ besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn die Einschränkung $f|_{X\setminus\{p\}}\colon X \setminus \{p\} \to Y \setminus \{q\}$ stetig und universell abgeschlossen ist.
(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für die Aussage, wenn $|f^{-1}(\{q\})| \neq 1$.
Konkret, finden Sie eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen kompakten Hausdorff-Räumen, sodass $f|_{X\setminus f^{-1}(\{q\})}\colon X \setminus f^{-1}(\{q\}) \to Y \setminus \{q\}$ stetig und universell abgeschlossen ist, f aber nicht stetig ist.

4 | Relativ hausdorffsch

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt separiert, falls das Bild der Diagonalen

$$\Delta\colon X \to X \times_Y X$$

in $X \times_Y X$ abgeschlossen ist.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann separiert ist, wenn je zwei Punkte $x \neq x'$ mit $f(x) = f(x')$ disjunkte Umgebungen in X besitzen.
(b) Zeigen Sie, dass Fasern separierter Abbildungen hausdorffsch sind.
(c) Zeigen Sie, dass $X \to *$ genau dann separiert ist, wenn X ein Hausdorff-Raum ist.
