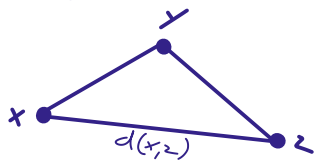
1. Grundbegriffe

Metrische Räume (Wdh)

1. Def.: Eine Metrik auf einer Menge X ist eine Abbildung $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Positive Definitheit: $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$
- Dreiecksungleichung: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$



2. Def: Ein metrischer Raum (X,d) ist eine Menge X mit einer Metrik d.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abb. $f: X \longrightarrow Y$ ist stetig in $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$ gilt:

$$d(fx, fx') < \varepsilon.$$

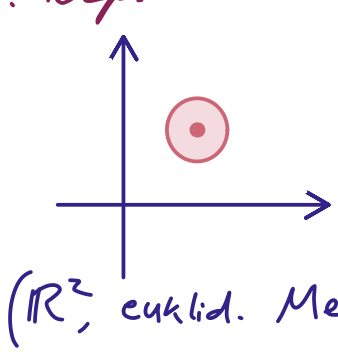
Sie ist stetig, wenn dies für alle $x \in X$ gilt.

3. Def.: Für $\varepsilon > 0$ heißt

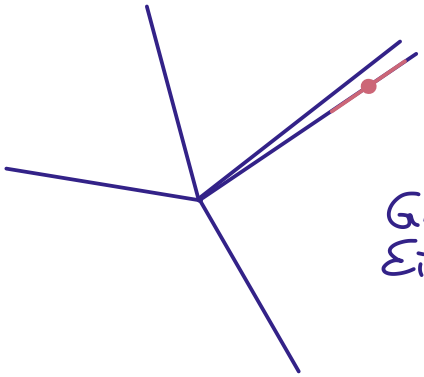
$$U_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x,x') < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung von x in (X,d).

4. Bsp.



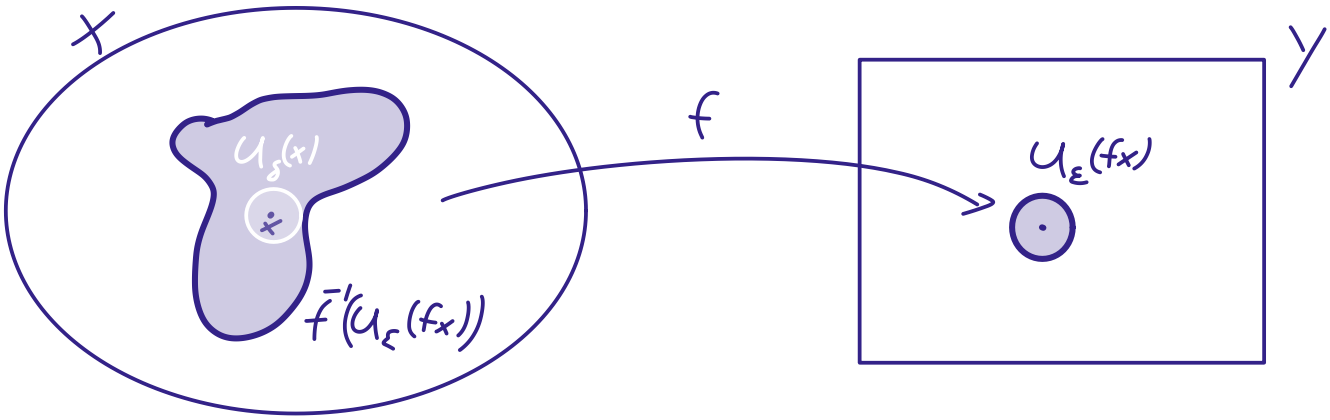
$(\mathbb{R}^2$, euklid. Metrik)



Graph mit Eisenbahn-metrik

5. Notiz: $f: (X,d_X) \longrightarrow (Y,d_Y)$ ist genau dann stetig in x wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$U_\delta(x) \subseteq f^{-1} U_\varepsilon(fx).$$



6. Def.: Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist offen, wenn sie mit jedem Punkt auch eine ε-Umgebung desselben enthält.

7. Bsp.: ε-Umgebungen sind offen.
(Dreiecksungleichung)

8. Satz: Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Beweis:

($\Leftarrow$) Sind Urbilder offener Mengen offen, so ist insbesondere $f^{-1}(U_\varepsilon(x))$ offen für jedes x und jedes $\varepsilon > 0$. Also ist f stetig.

($\Rightarrow$) Sei f stetig, und sei $V \subseteq Y$ offen.
Sei $x \in f^{-1}V$. Dann ist $f(x) \in V$, und da V offen ist, ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$.
Da f stetig ist, ex. ein $\delta > 0$ mit
$U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$.
Also ist

$$U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}V.$$

Somit ist $f^{-1}V$ offen. □

Topologische Räume

9. Def.: Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen von X, die offen genannt werden, die folgenden Axiomen genügt:

- $\emptyset$ und X sind offen
- beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen
- Schnitte **endlich** vieler offener Mengen sind offen

10. Def.: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine Menge X mit einer Topologie $\mathcal{T}$.

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume. Eine stetige Abb.

$$f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

ist eine Abb. $f: X \to Y$ derart, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

11. Bsp.:

- $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ — Klumpentopologie
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge) — diskrete Topologie
- (X, d) metrischer Raum
  $\mathcal{T} = \{$offene Mengen i.S.v. Def. 6$\}$
  — von d induzierte Topologie

Ein top. Raum $(X, \mathcal{T})$ ist metrisierbar, wenn es eine Metrik auf X gibt, die $\mathcal{T}$ induziert.

Abgeschlossene Mengen

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum

12. Def: $A \subseteq X$ ist abgeschlossen
$:\Leftrightarrow X - A$ ist offen

13. Notiz:

- $\emptyset$ und X sind abgeschlossen
- beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen
- Vereinigungen **endlich** vieler abgeschl. Mengen sind abgeschlossen

14. Bsp. in $\mathbb{R}$:

- $\emptyset$ und X stets offen **und** abgeschlossen
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- in $\mathbb{R}$ (mit Top., die von der euklidischen Metrik kommt):

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right)}_{\text{offen}} = \{0\} \text{ – nicht offen}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[\tfrac{1}{n}, 1\right]}_{\text{abg.}} = (0, 1] \text{ – nicht abgeschlossen}$$

15. Notiz: Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Menge abgeschlossen sind.

16. Def.: $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $M \subseteq X$

Der *Abschluss* $\overline{M}$ von M in X ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

Das *Innere* $\mathring{M}$ von M in X ist die größte offene Menge, die in M enthalten ist.

Der *Rand* von M ist $\partial M := \overline{M} - \mathring{M}$.

17. Notiz:

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \text{ abg.} \\ A \supseteq M}} A$$

$$\mathring{M} = \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subseteq M}} U$$

18. Bsp.:

- $X = \mathbb{R}^2$, $M =$ abgeschlossene Einheitsscheibe
  $= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$
  $=: D_1(0)$

  $\overline{M} = M$, $\mathring{M} = U_1(0)$
  $\partial M = S^1$

- $X = D_1(0)$, $M = D_1(0)$
  $\overline{M} = M = \mathring{M}$, also
  $\partial M = \emptyset$.

Offene & abg. Abbildungen

19. Def.: Eine stetige Abb. ist offen, wenn Bilder offener Mengen offen sind.

analog: abgeschlossen

20. Bsp.:

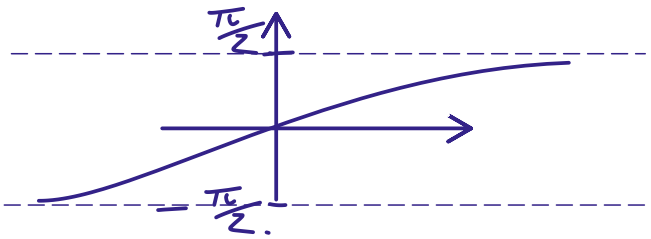
$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$

stetig ✓

abgeschl. ✓

offen ✗ (z.B. $f(U_1(0)) = \{0\}$)

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(x)$

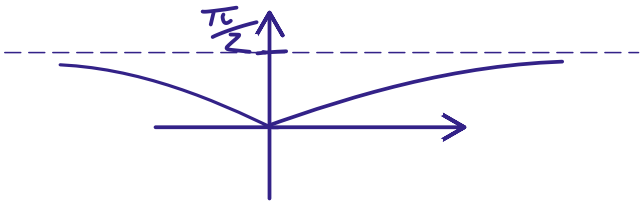


stetig ✓

abgeschl. ✗ ($f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

offen ✓

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \mapsto |\arctan(x)|$



stetig ✓

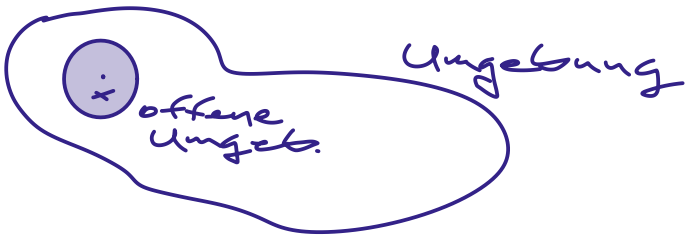
abgeschl. ✗

offen ✗ ($f(\mathbb{R}) = [0, \frac{\pi}{2})$)

Stetigkeit in einem Punkt

21. Def: X top. Raum, $x \in X$.

Eine offene Umgebung von x ist eine offene Menge, die x enthält.
Eine Umgebung von x ist eine Teilmenge, die eine offene Umgebung von x enthält.



22. Def.: X, Y top. Räume, $x \in X$

Eine Abb. $f: X \longrightarrow Y$ ist stetig in x, falls für jede Umgebung V von fx gilt: $f^{-1}V$ ist Umgebung von x.

23 Satz.: $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig (i.S.v. Def. 10), wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist (i.S.v. Def. 22).

Beweis: (Ü) vgl. Beweis zu Satz 8. □

Die Kategorie der top. Räume

24. Notiz:

- Sind $f: X \longrightarrow Y$ und $g: Y \longrightarrow Z$ stetig, so ist auch $g \circ f: X \longrightarrow Z$ stetig.
- $id_X: X \longrightarrow X$ ist stetig.

Kurz: „(top. Räume, stetige Abb.) bilden eine Kategorie"

25. Def.: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse von Objekten $X, Y, Z, \ldots$
- einer Klasse von Morphismen $\mathcal{C}(X, Y)$ für jedes Paar von Objekten (X, Y)
- einer Komposition

$$\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Z)$$
$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

- einen Identität

$$id_X \in \mathcal{C}(X,X) \quad \text{für jedes Objekt } X$$

und erfüllt folgende Axiome:

- Komposition ist assoziativ
- Identitäten sind neutral bzgl. Komposition.

Morphismen $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ schreiben wir als $X \xrightarrow{f} Y$.

26. Def.: Ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ ist ein Isomorphismus, wenn es ein $X \longleftarrow Y: g$ gibt mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

27. Beispiele: Isos

Top :=	(top. Räume, stetige Abb.)	Homöomorphismen
	(Mengen, Abbildungen)	Bijektionen
	(Gruppen, Homomorphismen)	} „Isos"
	(abelsche Gruppen, ")	
	(K-Vektorräume, K-lineare Abb.)	

28. Def.: Ein Homöomorphismus ist ein Isom. in der Kategorie der top. Räume.

⚠ Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus.

z.B.: X Menge mit $|X| \geq 2$.

Hier ist

$$(X, \text{diskrete Top}) \longrightarrow (X, \text{Klumpentop.})$$
$$x \longmapsto x$$

stetig & bijektiv, aber die Umkehrabb. ist nicht stetig.

29. Notiz: Eine Abb. ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie stetig, bijektiv und offen ist.

(hier äquivalent: abgeschlossen)