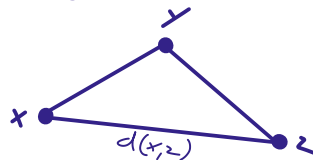


1. Topologische Räume

Metrische Räume (Wdh)

1. Def.: Eine Metrik auf einer Menge X ist eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Positive Definitheit: $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$
- Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$
- Dreiecksungleichung: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$



2. Def.: Ein metrischer Raum (X,d) ist eine Menge X mit einer Metrik d .

Seien (X,d_x) und (Y,d_y) metrische Räume.

Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ ist stetig

in $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$

ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$ gilt:

$$d(fx, fx') < \varepsilon.$$

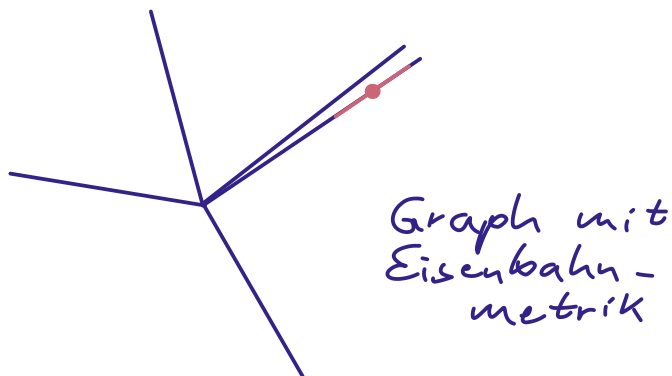
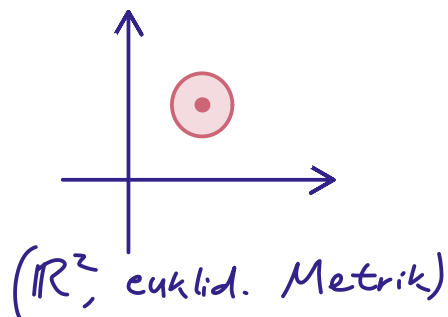
Sie ist stetig, wenn dies für alle $x \in X$ gilt.

3. Def.: Für $\varepsilon > 0$ heißt

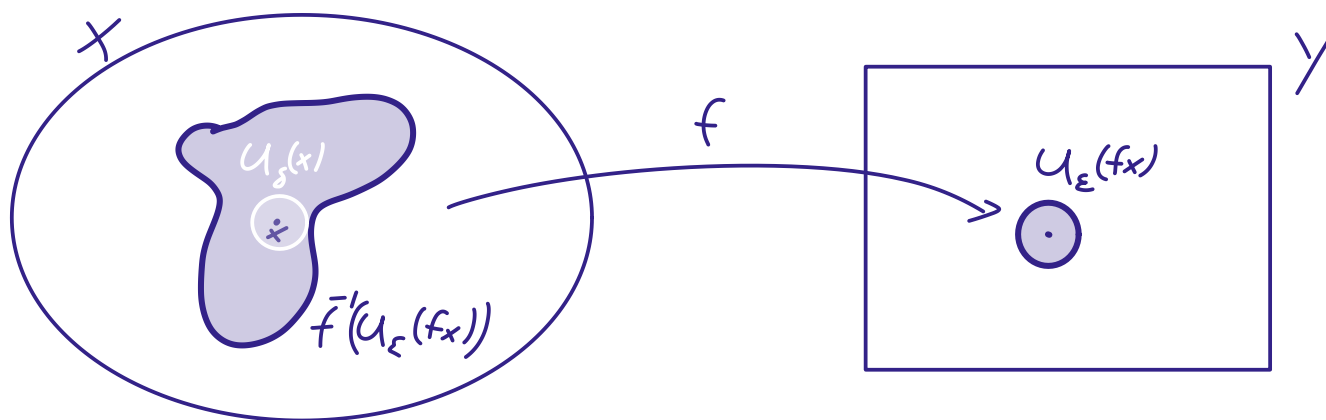
$$U_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}$$

ε -Umgebung von x in (X, d) .

4. Bsp.



5. Notiz: $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ist genau dann stetig in x wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(fx)).$$


6. Def.: Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist **offen**, wenn sie mit jedem Punkt auch eine ε -Umgebung desselben enthält.

7. Bsp.: ε -Umgebungen sind offen.
(Dreiecksungleichung)

8. Satz: Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Beweis:

($\Leftarrow$) Sind Urbilder offener Mengen offen, so ist insbesondere $f^{-1}(U_\varepsilon(x))$ offen für jedes x und jedes $\varepsilon > 0$. Also ist f stetig.

($\Rightarrow$) Sei f stetig, und sei $V \subseteq Y$ offen.

Sei $x \in f^{-1}V$. Dann ist $f(x) \in V$, und da V offen ist, ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$.
Da f stetig ist, ex. ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$.

Also ist

$$U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}V.$$

Somit ist $f^{-1}V$ offen.

□

Topologische Räume

9. Def.: Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen von X , die **offen** genannt werden, die folgenden Axiomen genügt:

- $\emptyset$ und X sind offen
- beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen
- Schnitte **endlich** vieler offener Mengen sind offen

10. Def.: Ein **topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ ist eine Menge X mit einer Topologie $\mathcal{T}$.

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume.
Eine stetige Abb.

$$f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

ist eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ derart, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

11. Bsp.:

- $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ — Klumpentopologie
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ — diskrete Topologie
Potenzmenge
- (X, d) metrischer Raum
 $\mathcal{T} = \{\text{offene Mengen i.S.v. Def. 6}\}$
— von d induzierte Topologie

Abgeschlossene Mengen

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum

12. Def: $A \subseteq X$ ist abgeschlossen

$\Leftrightarrow X - A$ ist offen

13. Notiz:

- $\emptyset$ und X sind abgeschlossen
- beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen
- Vereinigungen endlich vieler abgeschl. Mengen sind abgeschlossen

14. Bsp. in $\mathbb{R}$:

- $\emptyset$ und X stets offen und abgeschlossen
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

mit Top., die von der euklidischen Metrik kommt

- in $\mathbb{R}$:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}_{\text{offen}} = \{0\} \quad - \text{ nicht offen}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1\right]}_{\text{abg.}} = (0, 1] \quad - \text{ nicht abgeschlossen}$$

15. Notiz: Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Menge abgeschlossen sind.

16. Def.: $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $M \subseteq X$

Der **Abschluss** $\overline{M}$ von M in X ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

Das **Innere** $\overset{\circ}{M}$ von M in X ist die größte offene Menge, die in M enthalten ist.

Der **Rand** von M ist $\partial M := \overline{M} - \overset{\circ}{M}$.

17. Notiz:

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \text{ abg.} \\ A \supseteq M}} A$$

$$\overset{\circ}{M} = \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subseteq M}} U$$

18. Bsp.:

• $X = \mathbb{R}^2$, $M =$ abgeschlossene Einheits-
scheibe
 $= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$
 $=: D_1(\underline{0})$



$$\overline{M} = M, \quad \overset{\circ}{M} = U_1(\underline{0})$$
$$\partial M = S^1$$

• $X = D_1(\underline{0})$, $M = D_1(\underline{0})$
 $\overline{M} = M = \overset{\circ}{M}$, also
 $\partial M = \emptyset$.

Offene & abg. Abbildungen

19. Def.: Eine stetige Abb. ist offen, wenn Bilder offener Mengen offen sind.

analog: abgeschlossen

20. Bsp.:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto 0$$

stetig ✓

abgeschl. ✓

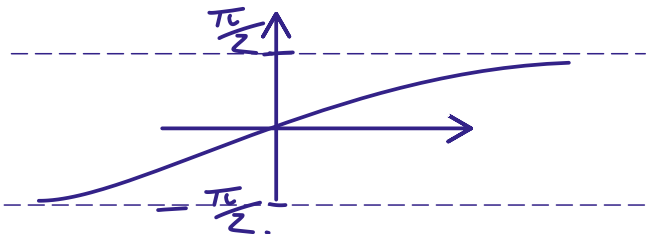
offen ✗ (z.B. $f(U_1(0)) = \{0\}$)

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(x)$$

stetig ✓

abgeschl. ✗ ($f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

offen ✓

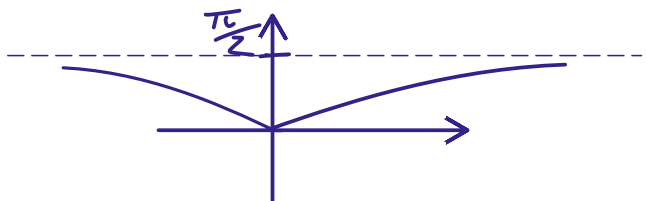


$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto |\arctan(x)|$$

stetig ✓

abgeschl. ✗

offen ✗ ($f(\mathbb{R}) = [0, \frac{\pi}{2})$)



Stetigkeit in einem Punkt

21. Def.: X top. Raum, $x \in X$.

Eine **offene Umgebung** von x ist eine offene Menge, die x enthält.

Eine **Umgebung** von x ist eine Teilmenge, die eine offene Umgebung von x enthält.



22. Def.: X, Y top. Räume, $x \in X$

Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ ist **stetig** in x , falls für jede Umgebung V von fx gilt: $f^{-1}V$ ist Umgebung von x .

23. Satz.: $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig (i.S.v. Def. 10), wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist (i.S.v. Def. 22).

Beweis: (Ü) vgl. Beweis zu Satz 8. $\square$

Die Kategorie der top. Räume

24. Notiz:

- Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetig, so ist auch $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig.
- $\text{id}_X: X \rightarrow X$ ist stetig.

Kurz: „(top. Räume, stetige Abb.)
bilden eine Kategorie“

25. Def.: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse von Objekten $X, Y, Z, \dots$
- einer Klasse von Morphismen $\mathcal{C}(X, Y)$ für jedes Paar von Objekten (X, Y)
- einer Komposition

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

- einer Identität

$$\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X) \text{ für jedes Objekt } X$$

und erfüllt folgende Axiome:

- Komposition ist assoziativ
- Identitäten sind neutral bzgl. Komposition.

Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ schreiben wir als

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

26. Def.: Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist ein Isomorphismus, wenn es ein $X \leftarrow Y: g$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$.

27. Beispiele:

Isos

$\text{Top} := (\text{top. Räume, stetige Abb.})$

Homöomorphismen

(Mengen, Abbildungen)

Bijektionen

(Gruppen, Homomorphismen)

(abelsche Gruppen, ")

(K-Vektorräume, K-lineare Abb.)

} "Isos"

28. Def.: Ein Homöomorphismus ist ein Isom. in der Kategorie der top. Räume.



Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus.

Z.B.: X Menge mit $|X| \geq 2$.

Hier ist

$(X, \text{diskrete Top}) \longrightarrow (X, \text{Klumpentop.})$

$x \mapsto x$

stetig & bijektiv, aber die Umkehrabb. ist nicht stetig.

29. Notiz: Eine Abb. ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie stetig, bijektiv und offen ist.

|
(hier äquivalent: abgeschlossen)