

2. Konstruktionen I

Unterräume

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Raum, $X \subseteq Y$ Teilmenge

Was ist eine sinnvolle Top. auf X ?

Sicherlich sollte $i: X \hookrightarrow Y$ stetig sein.

Also muss für jedes offene $V \subseteq Y$

$X \cap V$ offen sein in X .

1. Def.: Für $(Y, \mathcal{T}_Y)$, X wie oben ist die Unterraumtopologie auf X gegeben durch

$$\mathcal{T}_X := \{V \cap X \mid V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Das ist eine Topologie [...].

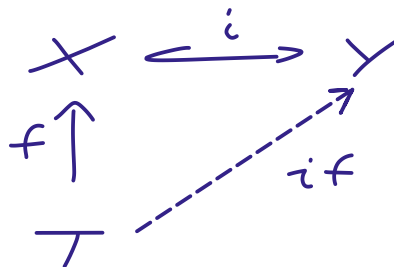
2. Satz: Die Unterraumtop. $\mathcal{T}_X$ hat die folgende universelle Eigenschaft (UE):

Eine Abb. $f: (T, \mathcal{T}_T) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$

ist genau dann stetig, wenn

$$i \circ f: (T, \mathcal{T}_T) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

stetig ist.



Beweis:

($\Rightarrow$) Da i stetig ist nach Konstruktion der Unterraumtop., ist für jedes stetige f auch if stetig.

($\Leftarrow$) Sei $if: T \rightarrow Y$ stetig.

Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ex. offenes $V \subseteq Y$ mit $U = V \cap X$.

Also ist

$$\begin{aligned}\bar{f}'(U) &= \bar{f}'(V \cap X) \\ &= \bar{f}'(i^{-1}(V)) \\ &= (if)^{-1}(V)\end{aligned}$$

offen in T .

□

3. Bsp.: Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig,

$\text{Bild}(f) := f(X)$, ausgestattet mit der Unterraumtop. bzgl. $f(X) \subseteq Y$.
Dann ist auch die eingeschränkte Abb.

$$\begin{aligned}\hat{f}: X &\longrightarrow \text{Bild}(f) \\ x &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

stetig, denn $i\hat{f} = f$ ist stetig.

4. Def.: Eine **Einbettung** ist eine stetige Injektion

$$(X, \mathcal{T}_X) \xhookrightarrow{i} (Y, \mathcal{T}_Y)$$

derart, dass $\mathcal{T}_X$ mit der von i und $\mathcal{T}_Y$ induzierten Unterraumtopologie übereinstimmt.