3. Eigenschaften

Zusammenhang

1. Def.: Ein topologischer Raum ist **zusammenhängend**, wenn für jeden Homöomorphismus $X_1 \amalg X_2 \cong X$ gilt: genau einer der Räume X_1, X_2 ist leer.

2. Satz: Für einen Raum X sind äquivalent:

(Z_2) X ist zusammenhängend.

(Z) Für jeden Homöomorphismus $\coprod_{i \in I} X_i \cong X$ ist bereits die Einschränkung auf ein X_i ein Homöomorphismus. (I beliebige Indexmenge)

(OA) Es gibt in X genau zwei Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (nämlich $\emptyset$ und X, wobei $\emptyset \neq X$).

(δ_2) Jede stetige Abbildung $X \longrightarrow S^0 = \{\pm 1\}$ (mit diskreter Topologie) hat genau einen Bildpunkt.

(δ) Jede stetige Abbildung $X \longrightarrow D$ in einen diskreten Raum D hat genau einen Bildpunkt.

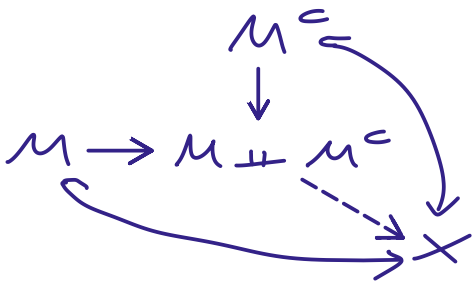
3. Bemerkung: $\emptyset$ ist **nicht** zusammenhängend.
(Betrachte in (Z): $\emptyset \cong \coprod_{i \in \emptyset}$)

Beweis:

$(Z \Rightarrow Z_2)$ ✓

$(\delta \Rightarrow \delta_2)$ ✓

$(Z_2 \Rightarrow OA)$ Ist $M \subsetneq X$ offen und abg., so ist auch ihr Komplement M^c offen und abg. Betrachte die kanonische stetige Bijektion $M \amalg M^c \longrightarrow X$:



Da M und M^c offen sind, sind offene Teilmengen von M und M^c offen in X. Daher ist obige Bijektion offen, also ein Homöom. Also folgt: $M = \emptyset$ oder $M^c = \emptyset$.

$(OA \Rightarrow \delta, \delta_2)$: Sei $f: X \longrightarrow D$ stetig, D diskret

Dann ist $f^{-1}\{d\}$ offen und abg. für jedes $d \in D$

Also ist jede Fasern von f entweder leer oder ganz X.

Da f einen Bildpunkt besitzt, ist eine Faser nicht-leer.

$(\delta_2 \Rightarrow Z_2)$, $(\delta \Rightarrow Z)$:

Sei $h: \coprod_{i \in I} X_i \cong X$ ein Homöomorphismus. Betrachte:

$$f: X \underset{h^{-1}}{\cong} \coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow I \quad \text{(} I \text{ diskret)}$$
$$(x, i) \longmapsto i$$

Diese Abb. hat wegen δ / δ_2 genau einen Bildpunkt.

Daraus folgt die Aussage. □

4. Beispiel:

$X \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ X ist ein nicht-leeres Interval.

(d.h. $\forall a<b<c \in \mathbb{R}$ gilt: $a, c \in X \Rightarrow b \in X$)

($\Leftarrow$) Sei $f: X \longrightarrow S^0$ stetig.

Für beliebige $a, c \in X$ nimmt die Komposition

$$X \xrightarrow{f} S^0 \hookrightarrow \mathbb{R}$$

jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(c)$ an (Zwischenwertsatz). Andererseits kann sie per Konstruktion nur die Werte ± 1 annehmen. Also ist sie konstant.

($\Rightarrow$) Angenommen, $\exists a<b<c \in \mathbb{R}$ mit $a, c \in X$, $b \notin X$.

Dann gilt:

$$X = (X \cap \mathbb{R}_{<b}) \cup (X \cap \mathbb{R}_{>b})$$

Nach Def. der Unterraumtop. sind beide Mengen offen, somit beide abgeschlossen; außerdem beide $\neq \emptyset$.

↯ (OA) □

5. Satz: Bilder zusammenhängender Teilmengen unter stetigen Abb. sind zusammenhängend.

Beweis:

Ist $f: X \longrightarrow Y$ stetig, so ist auch

$$X \twoheadrightarrow \text{Bild}(f) \text{ stetig.}$$

Sei nun X zusammenhängend, und $\text{Bild}(f) \xrightarrow{g} S^0$ stetig. Dann hat

$$X \twoheadrightarrow \text{Bild}(f) \xrightarrow{g} S^0$$

genau einen Bildpunkt. Also hat g genau einen Bildpunkt. Somit Bild (f) zusammenhängend. □

6. Satz: Der Abschluss einer zshgd. Teilmenge ist zshgd.

Beweis:

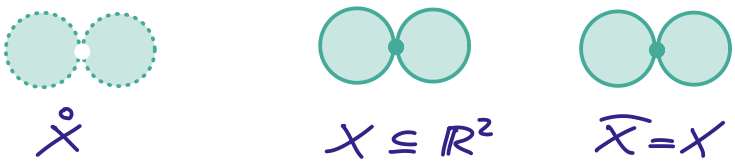
Sei $Z \subseteq X$ zshgd., $\overline{Z} \xrightarrow{g} S^0$ stetig. Dann gilt $\emptyset \neq g(Z) = \{+1\}$, also $Z \subseteq g^{-1}(\{+1\})$. Da $g^{-1}(\{+1\})$ abg., folgt: $\overline{Z} \subseteq g^{-1}(\{+1\})$.

Demnach $g(\overline{Z}) = \{+1\}$. □

⚠ Das Innere einer zshgd. Teilmenge ist i. A. nicht zshgd.

z.B.: $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad (\{0\}^\circ = \emptyset)$

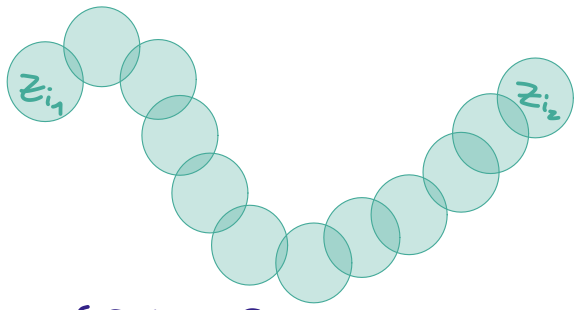
z.B. in $\mathbb{R}^2$:



7. Satz: Sei $\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X$ eine nicht-leere Vereinigung zshg. Teilmengen Z_i. Wenn sich je zwei Mengen Z_{i_1} und Z_{i_2} durch eine Kette

$$Z_{i_1} = Z_{j_1}, Z_{j_2}, \dots, Z_{j_n} = Z_{i_2}$$

verbinden lassen derart, dass Nachbarn nicht disjunkt sind (also jeweils $Z_{j_k} \cap Z_{j_{k+1}} \neq \emptyset$), so ist auch $\bigcup_{i \in I} Z_i$ zusammenhängend.



Beweis: Nutze wieder (δ_2). Eine stetige Abb. $g: \bigcup Z_i \longrightarrow S^0$ ist auf jedem Z_i konstant und nimmt auf sich schneidenden Z_i's denselben Wert an. □

8. Def. & Satz: X top. Raum, $x \in X$

Die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ von x in X ist die größte zshgd. Teilmenge, die x enthält. Sie ist stets abgeschlossen in X.

Beweis:

Existenz: $\bigcup_{Z : x \in Z,\ Z \text{ zshgd.}} Z$ ist zshg. nach vorherigem Satz (es schneidet jedes Z jedes andere).

Abgeschlossen: Folgt aus Satz 6. □

9. Satz: Hat X nur endlich viele Zusammenhangs-komponenten, so ist X deren Koprodukt.

Beweis:

In diesem Fall ist jede Komponente auch offen, denn ihr Komplement ist die Vereinigung der endlich vielen anderen, abgeschlossenen Komponenten. □

10. Gegenbeispiel mit ∞ vielen Komponenten: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (mit Unterraumtop).

- $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend, d.h. $\mathcal{Z}(q) = \{q\}$ $\forall q \in \mathbb{Q}$.
  (Zu je zwei rationalen Zahlen $q < q' \in \mathbb{Q}$ existiert eine irrationale Zahl $q < r < q'$ und somit ist

$$g_r : \mathbb{Q} \longrightarrow S^0, \quad x \longmapsto \begin{cases} +1 & \text{für } x > r \\ -1 & \text{für } x < r \end{cases}$$

  stetig mit $g_r(q) \neq g_r(q')$.)
- Aber: $\mathbb{Q}$ ist nicht diskret.

11. Satz: Ein Produkt $X \times Y$ ist genau dann zshgd., wenn X und Y zusammenhgd. sind.

Beweis:

($\Rightarrow$) X & Y sind die Bilder der Projektionen und somit zshgd. nach Satz 5.

($\Leftarrow$) Da $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$ ist auch $X \times Y \neq \emptyset$.

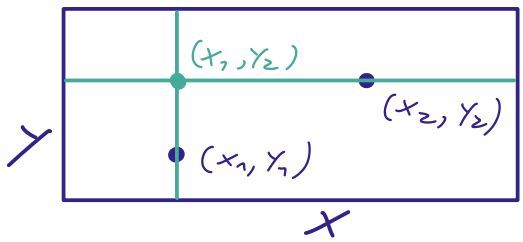
Sei nun $f: X \times Y \longrightarrow S^0$ stetig.

Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ beliebig.

R. z. z.: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

Die Einschränkung von f auf $\{x_1\} \times Y$ ist konstant, denn $\{x_1\} \times Y \cong Y$ und Y ist zshgd. Also:

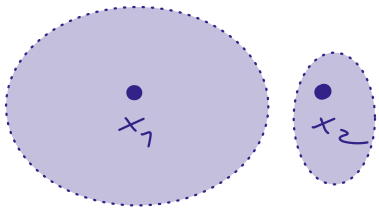
$$f(x_1, y_1) = f(x_1, y_2).$$



Analog: $F(x_1, y_2) = f(x_2, y_2)$. □

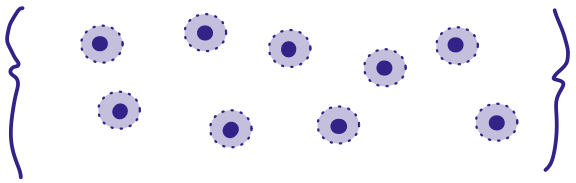
Hausdorff-Räume

12. Def.: Ein top. Raum ist hausdorffsch, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.



13. Bsp.:

- Jeder diskrete Raum (d.h.: jede Menge ausgestattet mit der diskreten Topologie)



ist hausdorffsch.

- Eine Menge mit ≥ 2 Elementen mit der Klumpentopologie ist **nicht** hausdorffsch.

- Jeder metrische Raum (X, d) ist hausdorffsch:
  Sind $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, so ist $\varepsilon := d(x_1, x_2) > 0$, und
  $$U_{\varepsilon/2}(x_1) \cap U_{\varepsilon/2}(x_2) = \emptyset.$$
  Allgemeiner:

14. Notiz: Jeder metrisierbare top. Raum (siehe Bsp. 1.11) ist hausdorffsch.

Kompaktheit

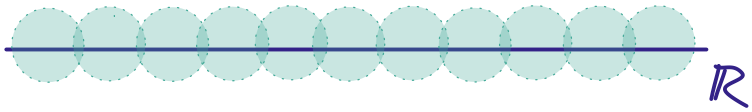
X topologischer Raum

15. Def.: Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie offener Teilmengen $(U_j)_{j\in J}$ mit $\bigcup_{j\in J} U_j = X$.
Für eine Teilmenge $I \subseteq J$ heißt $(U_j)_{j\in I}$ **Teilüberdeckung**. Die Überdeckung ist **endlich**, wenn J endlich ist.

16. Def.: X ist **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

17. Bsp.:

- Ein diskreter Raum ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.
- $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt

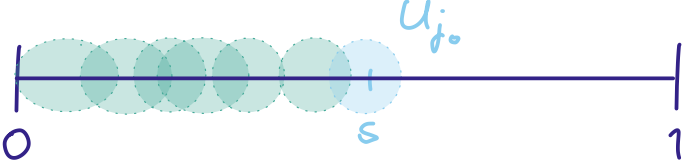


- $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt

Sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von $[0,1]$.
Sei

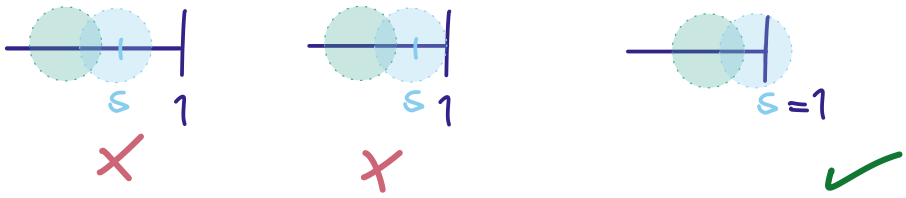
$$M := \{ t \in [0,1] \mid [0,t] \text{ wird von endlich vielen } U_j \text{ überdeckt} \}$$

$s := \sup M$
($M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$; M beschränkt; also ex. Supremum)
Es ist $s \in U_{j_0}$ für ein j_0. Dieses U_{j_0} enthält ein $t \in M$.



Die endlich vielen U_j, die $[0,t]$ überdecken, zusammen mit U_{j_0}, überdecken $[0,s]$. Also $s \in M$.
Das gleiche Argument gilt für jedes $s' \in U_j$, also $U_j \subseteq M$.

Also muss s der größte Wert in U_j sein.

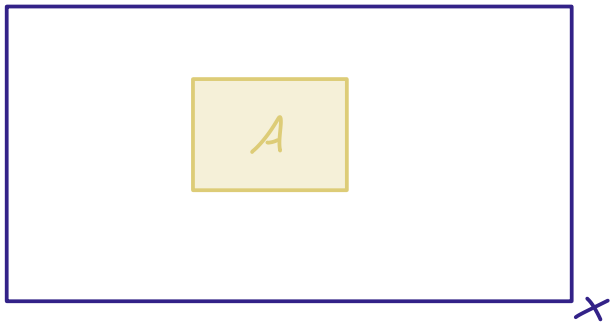


✗ ✗ ✓ □

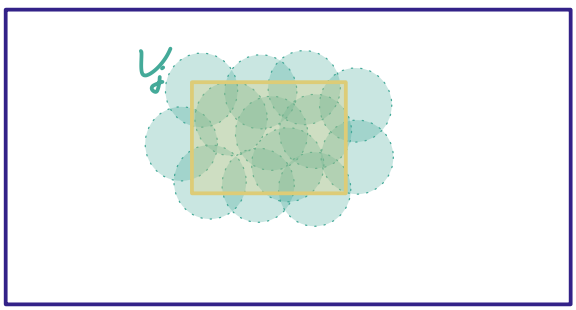
18. Satz: Jeder abgeschlossene Unterraum eines kompakten Raums ist kompakt.

Beweis:

Sei X kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen



Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von A.
Jedes U_j hat die Form $U_j = A \cap V_j$ für ein offenes $V_j \subset X$.



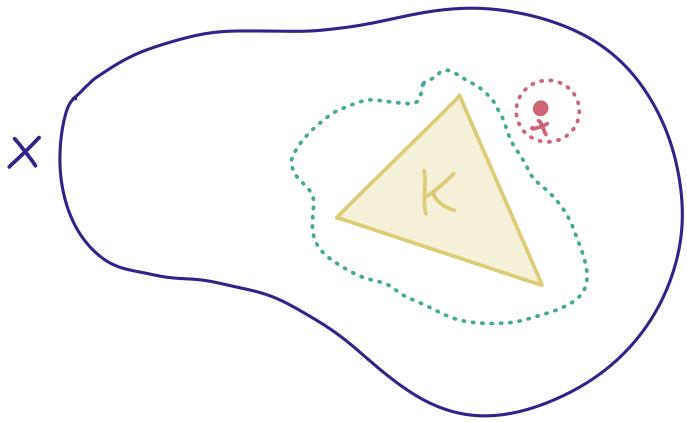
Nun ist $(V_j)_{j \in J}$ zusammen mit $X \setminus A$ eine offene Überdeckung von X, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $(V_j)_{j \in I}, X \setminus A$.
Also ist $(U_j)_{j \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung von A.

□

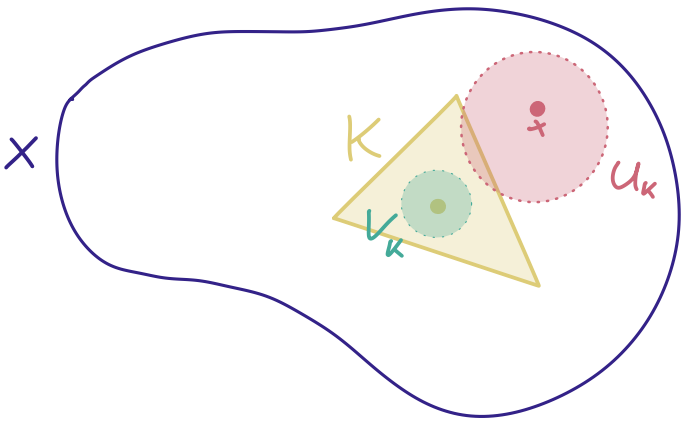
19. Satz: Jeder kompakte Unterraum eines Hausdorff-Raums ist abgeschlossen.

Wir werden sogar zeigen:

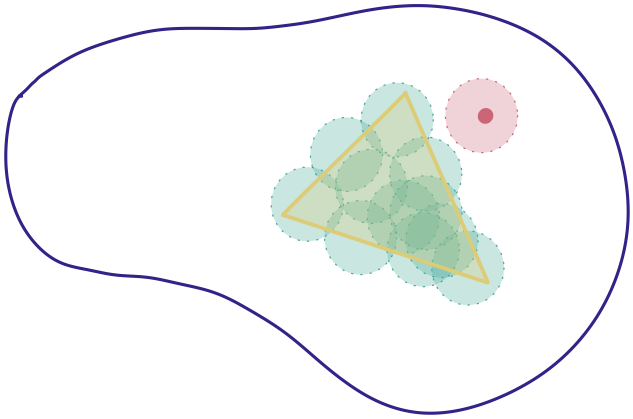
19⁺ Satz: In einem Hausdorff-Raum X lässt sich jeder kompakte Unterraum K von jedem Punkt $x \in X \setminus K$ trennen:
Es existieren offene Mengen $V \supseteq K$
und $U \ni x$
mit $U \cap V = \emptyset$.



Beweis:
Da X hausdorffsch ist, finden wir zu jedem $k \in K$ offene Umgebungen V_k von k
U_k von x
mit $V_k \cap U_k = \emptyset$.



Nun ist $(V_k)_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von K, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $V_{k_1}, \dots, V_{k_n}$.



Sei $V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{k_i}$,
$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{k_i}$.

Nach Konstruktion gilt nun:

- V ist offen ✓
- U ist offen (Schnitt endlich vieler offener Mengen)
- $x \in U$
- $K \subseteq V$
- $V \cap U = \emptyset$. ✓

□

20. Satz: Das Bild eines kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.

Beweis:

Sei $f: X \to Y$ stetig, X kompakt. Indem wir ggf. Y durch Bild(f) ersetzen, können wir annehmen, dass f surjektiv ist. Zu zeigen ist: Y kompakt.

Sei $(V_j)_{j \in J}$ offene Überdeckung von Y. Dann ist $(f^{-1}(V_j))_{j \in J}$ offene Überdeckung von X, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(V_j))_{j \in I}$.

Da f surjektiv ist, ist $f(f^{-1}(V_j)) = V_j$, und es folgt, dass $(V_j)_{j \in I}$ eine (endliche) Teilüberdeckung von Y ist. □

21. Korollar:

(a) Jede stetige Abb. von einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ist abgeschlossen. (sogar eigentlich – siehe Korollar 31).

(b) Jede stetige Bijektion von einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ist ein Homöomorphismus.

Beweis:

$$\underset{\text{kompakt}}{X} \xrightarrow[\text{stetig}]{f} \underset{\text{Hd}}{Y}$$

a: Ist $A \subseteq X$ abg., so ist A kompakt (Satz 18).
Also ist $f(A)$ kompakt (Satz 20).
Also ist $f(A)$ abgeschlossen (Satz 19).

b folgt aus a □

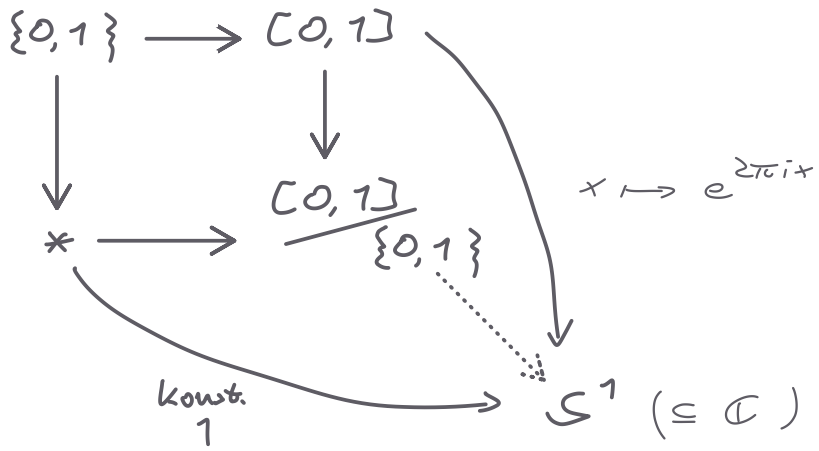
22. Beispiel:

$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist hausdorffsch, da $\mathbb{R}^2$ hausdorffsch.

Das Pushout $\frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ ist kompakt (Bsp. 17 + Satz 20).

Ferner haben wir eine stetige Bijektion

$$\frac{[0,1]}{\{0,1\}} \longrightarrow S^1.$$



Aus Korollar 21 (b) folgt also: $\frac{[0,1]}{\{0,1\}} \cong S^1$

Lokale Kompaktheit

23. Def.: Ein Raum ist lokal kompakt, wenn jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung desselben Punktes enthält.

24. Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt.
- Jeder offene Unterraum eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt.
- Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist lokal kompakt, denn allgemeinen gilt:

25. Satz: Ein Hausdorff-Raum ist genau dann lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

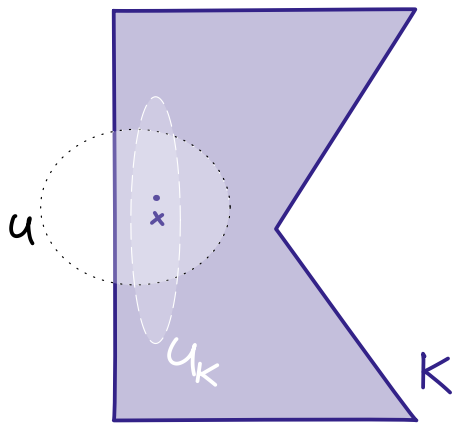
Beweis:

($\Rightarrow$) klar

($\Leftarrow$) Sei X hausdorffsch, $x \in X$,
U offene Umgebung von x.

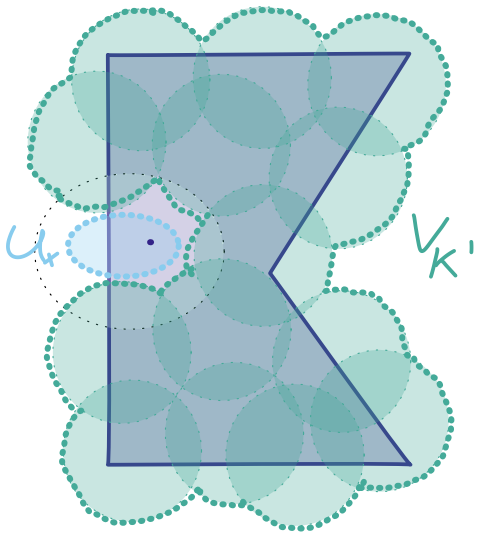
zz: Es gibt eine kompakte Umgebung von x, die in U enthalten ist.

Nach Voraussetzung ex. eine kompakte Umgebung K von x.
(Dieses K enthält also eine offene Umgebung U_K von x.)



$K' := K \setminus U$ ist abgeschlossen, also kompakt (Satz 18).
Nach Satz 19$^+$ existieren also offene $U_x, V_{K'} \subseteq X$ mit

$$U_x \cap V_{K'} = \emptyset,$$
$$K' \subseteq V_{K'},$$
$$x \in U_x.$$

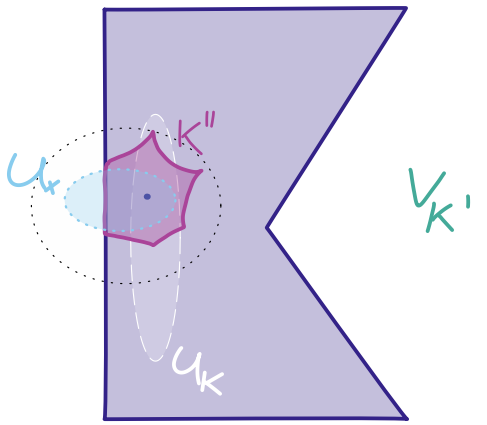


Nun ist $K'' := K \setminus V_{K'}$ kompakt, denn diese Menge ist abgeschlossen in K (Satz 18).
Ferner ist K'' eine Umgebung von x:

$$x \in U_x \subseteq X \setminus V_K,$$

somit

$$x \in U_K \cap U_x \subseteq K \setminus V_{K'} = K'',$$



also ist $U_K \cap U_x$ eine offene Umgebung von x, die in K'' enthalten ist.
Und schließlich ist $K'' \subseteq U$, denn

$$K'' = K \setminus V_{K'} \subseteq K \setminus K' = K \setminus (K \setminus U) \subseteq U.$$ □

26. Gegenbsp.:

- Ein Raum, der nicht lokal kompakt ist:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

(Es gibt in $\mathbb{Q}$ keine kompakten Umgebungen:
Jedes offene U in $\mathbb{Q}$ hat die Form $U = U' \cap \mathbb{Q}$ für ein offenes $U' \subseteq \mathbb{R}$. In U' gibt es ein irrationales x_∞, also $x_\infty \notin U$, zusammen mit einer rationalen Folge $x: \mathbb{N} \longrightarrow U$, die gegen x_∞ konvergiert.
Falls $U \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}$ mit K kompakt, so wäre also x eine Folge in K mit Grenzwert außerhalb von K.)
Das kann nicht sein, denn da $\mathbb{Q}$ Hd ist lässt sich x_∞ nach Satz 19 durch eine offene Umgebung von K trennen.)

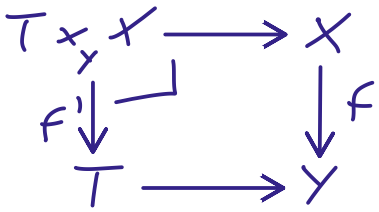
- Ein Raum, der kompakt, aber nicht lokal kompakt ist:

Einpunktpcmht-Kompahtifizierung von $\mathbb{Q}$ [...].

(Diese ist nach Satz 25 offenbar nicht mehr hausdorffsch.)

Eigentliche Abbildungen

27. Def.: Eine stetige Abb. $f: X \to Y$ ist eigentlich (engl.: proper) / universell abgeschlossen falls ihr Pullback entlang jeden stetigen Abb. $T \to Y$ abgeschlossen ist:
(In jedem Pullbackquadrat



soll f' abgeschlossen sein.)

Insbesondere ist f selbst abgeschlossen (betrachte $Y \xrightarrow{id} Y$).

28. Satz: Ein Raum X ist genau dann kompakt, wenn $X \longrightarrow *$ eigentlich ist.

Beweis:

($\Leftarrow$) Sei $(U_j)_{j \in J}$ offene Überdeckung von X.
Wähle $T := \mathcal{P}(J)$ mit folgenden offen Mengen: $\uparrow I_0 := \{ I \mid I \supseteq I_0 \}$
für jedes endliche $I_0 \subseteq J$ sowie beliebige Vereinigungen solcher Mengen. Das ist eine Topologie auf $\mathcal{P}(J)$, in der jede nicht-leere offene Menge ein endliches I_0 als Element enthält.

Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(J) \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_T} & & \downarrow \\ \mathcal{P}(J) & \longrightarrow & * \end{array}$$

und folgende abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathcal{P}(J) \times X$:

$$A := \{ (I, x) \mid x \notin \bigcup_{i \in I} U_i \}$$

(Das Komplement von A ist offen:
Ist $(I,x) \notin A$, so ex. $i \in I$ mit $x \in U_i$.
Dann ist $(I,x) \in \uparrow\{i\} \times U_i$, und $\uparrow\{i\} \times U_i$ ist ein offenes Rechteck, das A nicht schneidet.)

Nach Voraussetzung ist also $\pi_T(A)$ abgeschl. in $\mathcal{P}(J)$, wobei

$$\pi_T(A) = \{ I \subseteq J \mid \exists x \in X : x \notin \bigcup_{i \in I} U_i \}$$

$$= \{ I \subseteq J \mid (U_i)_{i \in I} \text{ überdecken } X \text{ nicht} \}.$$

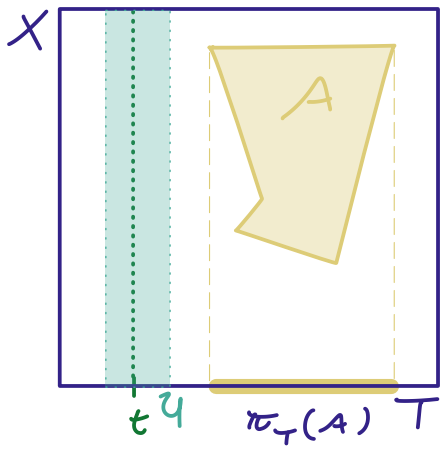
Also ist das Komplement

$$\{ I \subseteq J \mid (U_i)_{i \in I} \text{ überdecken } X \}$$

offen (und nicht leer, denn J liegt darin).
Also enthält es ein endliches I_0.

($\Rightarrow$) Sei X kompakt, T beliebig, $A \subseteq T \times X$ abg.
zz: $\pi_T(A) \subseteq T$ abgeschlossen.
rzz: Jedes $t \in T \setminus \pi_T(A)$ besitzt offen Umgebung in $T \setminus \pi_T(A)$.
Sei also $t \in T \setminus \pi_T(A)$. Dann ist

$$\{t\} \times X \subseteq (T \times X) \setminus A$$



und nach Annahme ist $\{t\} \times T \cong X$ kompakt.
Nach dem Rechtecklemma (s.u.) $\exists$ offenes Rechteck

$$\{t\} \times T \subseteq U \times X \subseteq (T \times X) \setminus A$$

Nun ist U die gesuchte Umgebung von t. $\square$

29. Rechtecklemma: Jede offene Umgebung eines kompakten Rechtecks enthält eine offene Rechteckumgebung: Ausgehend von

$$K \times L \subseteq W \subseteq X \times Y$$

(K, L: kompakte Teilräume von X und Y; W: offen in $X \times Y$; $X \times Y$: beliebig)

finden wir stets

$$K \times L \subseteq U \times V \subseteq W.$$

(U, V: offen in X bzw. Y.)

Beweis:

Zu jedem $(k,\ell) \in K \times L$ existiert jedenfalls ein offenes Rechteck

$$(k,\ell) \subseteq U_{k,\ell} \times V_{k,\ell} \subseteq W$$

Fixieren wir ein $\ell \in L$, so wird K durch endlich viele $U_{k_1,\ell}, \dots, U_{k_n,\ell}$ überdeckt.

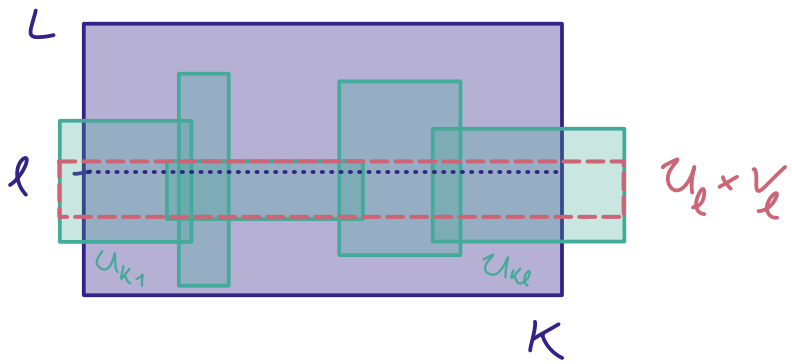
Also wird $K \times \{\ell\}$ durch

$$U_{k_1,\ell} \times V_{k_1,\ell}, \dots, U_{k_n,\ell} \times V_{k_n,\ell}$$

überdeckt. Daher

$$K \times \{\ell\} \subseteq U_\ell \times V_\ell$$

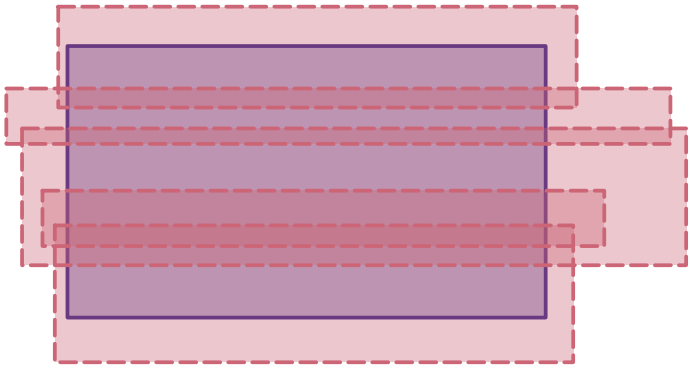
für $U_\ell = \bigcup_i U_{k_i,\ell}$, $V_\ell = \bigcap_i V_{k_i,\ell}$.



Nun wird C durch endlich viele $V_{\ell_1}, \dots, V_{\ell_m}$ überdeckt. Also

$$K \times L \subseteq U \times V \subseteq W$$

für $U := \bigcap_i U_{\ell_i}$ und $V := \left(\bigcup_i V_{\ell_i}\right)$.



□

30. Satz: Die folgenden Bedingungen an eine stetige Abb. sind äquivalent.

(a) f ist eigentlich

(b) f ist abgeschlossen und Urbilder kompakten Mengen sind kompakt.

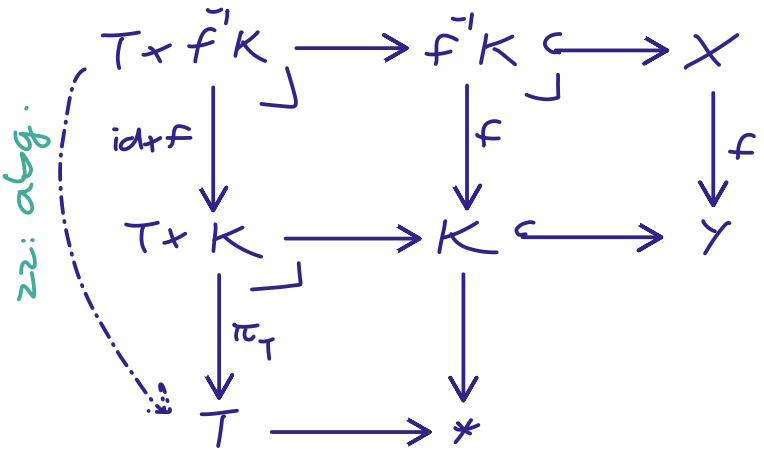
(c) f ist abgeschlossen und alle Fasern $f^{-1}(y)$ sind kompakt.

Beweis: $f: X \longrightarrow Y$

(a $\Rightarrow$ b) Sei $K \subseteq Y$ kompakt.

Nach Satz 28 reicht es zu zeigen, dass $f^{-1}K \longrightarrow *$ universell abgeschlossen.

Sei dazu T beliebig. Betrachte:



Alle Rechtecke in diesem Quadrat sind Pullbacks (nutze (U) Pullpullbackback).

π_T ist abg., da K kompakt (Satz 28)

$id \times f$ ist abg., da f eigentlich.

Also ist auch $\pi_T \circ (id \times f) = \pi_T$ abgeschlossen.

(b $\Rightarrow$ c) ✓

(c ⇒ a) Sei f abg. mit kompakten Fasern und sei

$$\begin{array}{ccc} T \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_T} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

gegeben.

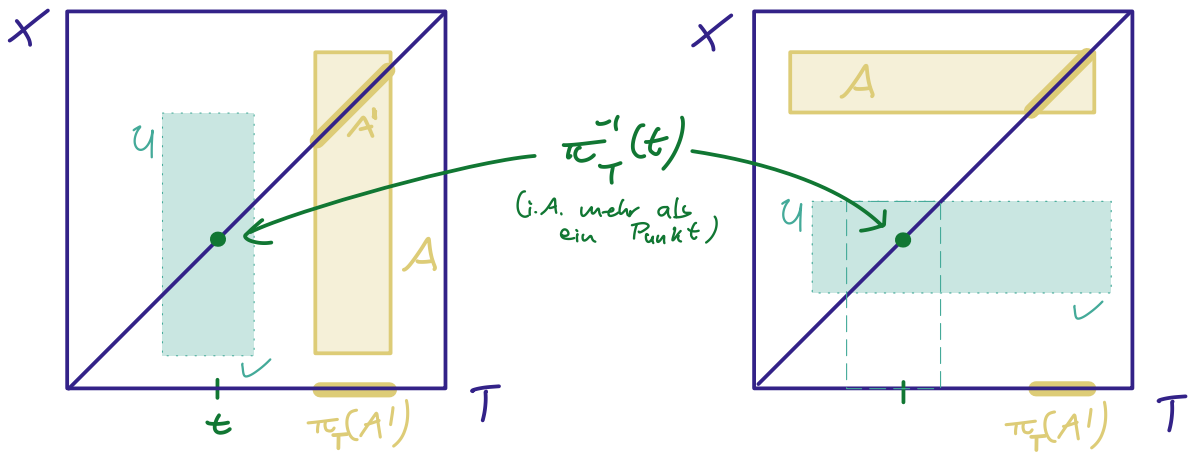
Sei $A' \subseteq T \times_Y X$ abgeschlossen, also
$A' = T \times_Y X \cap A$ für ein abg. $A \subseteq T \times X$.

zzz: Jedes $t \in T \setminus \pi_T(A')$ besitzt offene Umgebung in $T \setminus \pi_T(A')$.

Sei also $t \in T \setminus \pi_T(A')$. Nach Annahme ist

$$\pi_T^{-1}(t) = \{t\} \times f^{-1}(g(t)) \subseteq (T \times X) \setminus A$$

kompakt.



(Bilder für Spezialfall $X = Y = T$ und $f = g = id$:
$T \times_Y X \hat{=}$ Diagonale)

Laut Rechteckslemma ∃ offenes Rechteck

$$\pi_T^{-1}(t) \subseteq \underbrace{V}_{\text{offen}} \times \underbrace{U}_{\text{offen}} \subseteq (T \times X) \setminus A$$

Im Allgemeinen ist $V \cap \pi_T(A') \neq \emptyset$.

Betrachte daher außerdem

$$V' := g^{-1}(Y \setminus \underbrace{f(X \setminus U)}_{\text{abgeschlossen in } Y})$$

Das ist eine offene Umgebung von t, und $V' \cap V$ ist eine offene Umgebung von t, die $\pi_Y(A')$ nicht schneidet [...]. □

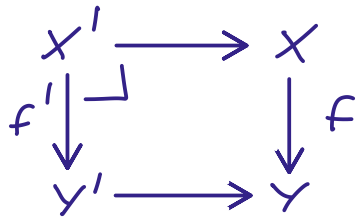
31. Korollar: Jede stetige Abb. von einem kompakten Raum in einen Hd-Raum ist eigentlich.

Beweis: Nach Korollar 21(a) ist sie abgeschlossen. Ist K kompakte Teilmenge eines Hd-Raums, so ist K darin abgeschlossen (Satz 19), also ist ihr Urbild abgeschlossen in einem kompakten Raum, also kompakt nach Satz 18. Nutze also Satz 30 (b ⇒ a). □

32. Satz (Konstruktionen mit eigentlichen Abb.)

(a) Jede Komposition eigentlicher Abb. ist eigentlich.

(b) Jedes Pullback einer eigentlicher Abb. ist eigentl.



f' eigentlich $\Leftarrow$ f eigentlich

(c) Jedes Produkt eigentlicher Abb. ist eigentlich.

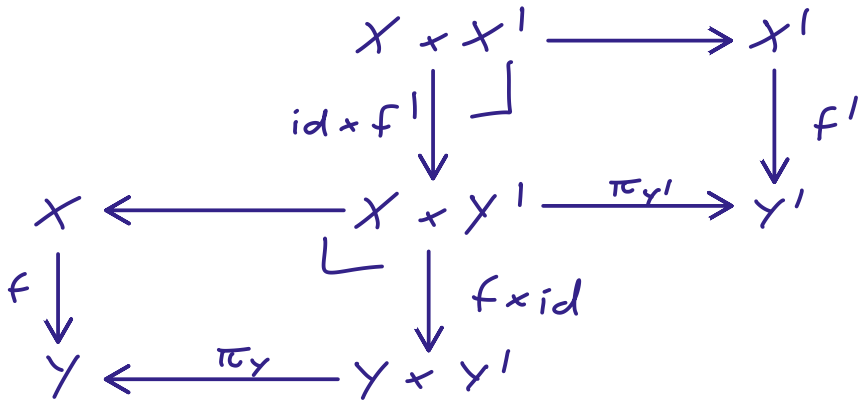
$$\left.\begin{array}{ll} X \xrightarrow{f} Y & \text{eigentlich} \\ X' \xrightarrow{f'} Y' & \text{eigentlich} \end{array}\right\} \Rightarrow X \times X' \xrightarrow{f \times f'} Y \times Y' \quad \text{eigentlich}$$

Beweis:

a: klar aus Def. + (ü) Pullpullbackback;
alternativ: Satz 30 (6).

b: klar aus Def. + (ü) Pullpullbackback

c: folgt aus a & b:



□

33. Satz: Sind X und Y kompakt, so ist auch $X \times Y$ kompakt.

Beweis: Satz 28 + Satz 32(c). □

(Satz 28: X kompakt $\Leftrightarrow$ $X \to *$ eigentlich)

Der Satz gilt sogar für ∞ Produkte: Satz von Tychonoff (s.u.).

34. Satz (Heine-Borel)

Ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossen und beschränkt ist.

(beschränkt: d.h. enthalten in einer Kugel von endlichem Radius)

Beweis:

($\Leftarrow$) Jedes abgeschlossene beschränkte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt (siehe Bsp. 17). Nach Satz 33 ist also auch jeder abgeschlossene Würfel $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt.

Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und beschränkt, so ist K in einem solchen Würfel enthalten:

$$K \subseteq I^n$$

(abgeschlossen; kompakt)

Also ist K kompakt nach Satz 18.

($\Rightarrow$) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist K nach Satz 19 abgeschlossen, denn $\mathbb{R}^n$ ist Hausdorffsch. Ferner ist K beschränkt: Betrachte die offene Überdeckung $(K \cap U_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$. □

Filter

35. Def.: Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmenge, für die gilt:

- $M, N \in \mathcal{F} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{F}$
- $M \in \mathcal{F}$ und $M \subseteq N \Rightarrow N \in \mathcal{F}$

Ein Filter filtert Mengen heraus, die „groß genug" sind.

36. Beispiele in beliebiger Menge X:

- falscher Filter: $\uparrow\varnothing := \mathcal{P}(X)$

  Alle anderen Filter nennen wir echt.
- Hauptfilter: $\uparrow M := \{N \mid N \supseteq M\}$ für $M \subseteq X$

  Punktfilter: $\uparrow\{x\}$ für ein $x \in X$
- Folgenfilter: $\langle x \rangle := \{N \mid N \supseteq x_i \text{ für fast alle } i\}$

  für Folge $x: \mathbb{N} \longrightarrow X$, $i \longmapsto x_i$

37. Beispiele in geordneter Menge X:

- $\mathcal{N}(\infty) := \{N \mid N \supseteq \underbrace{[a, \infty)}_{\{x \in X \mid x \geq a\}} \text{ für ein } a \in X\}$

  $\mathcal{N}(-\infty) := \{N \mid N \supseteq \underbrace{(-\infty, a]}_{\{x \in X \mid x \leq a\}} \text{ für ein } a \in X\}$

z.B. in $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathcal{N}(\infty) = \{\text{kofinite Mengen}\}$

(d.h.: Mengen mit endlichem Komplement)

$\mathcal{N}(-\infty) = \uparrow\{1\}$

38. Beispiele in top. Räumen:

- Nachbarschafts-/Umgebungsfilter von $x \in X$:

  $\mathcal{N}(x) := \{\text{Umgebungen von } x\}$

Varianten in $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{N}_+(x) := \{ N \mid N \supseteq U \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\}) \text{ für eine Umgebung } U \text{ von } x \}$$

$$\mathcal{N}_<(x) := \{ N \mid N \supseteq U \cap \mathbb{R}_{<x} \text{ für eine Umgebung } U \text{ von } x \}$$

etc.

39. Def.: $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Filter auf Menge X

$\mathcal{F}$ ist feiner als $\mathcal{G}$, geschrieben $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, falls $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$.

($\mathcal{F} < \mathcal{G} :\Leftrightarrow \mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ und $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$.)

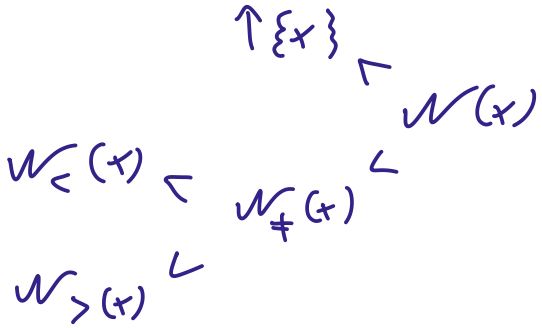
„$\leq$" bezieht sich auf die „Lochgröße".

40. Beispiele:

- 

falscher Filter (Schüssel) — Ultrafilter (s.u.) — Kaffeefilter — Nudelfilter

- in $\mathbb{R}$:



41. Def.: Ein Ultrafilter ist ein echter Filter, der durch keinen anderen echten Filter verfeinert wird.

42. Satz: Jeder echte Filter lässt sich zu (mindestens) einem Ultrafilter verfeinern.

Beweisidee: Auswahlaxiom in Form des Zornschen Lemmas. □

43. Beispiel: $\uparrow M$ ist ein Ultrafilter $\Leftrightarrow$ $M = \{x\}$ für ein x.

Andere Ultrafilter lassen sich schwer konkret beschreiben. Können uns Ultrafilter als „verallgemeinerte Punkte" vorstellen.

44. Lemma: Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn er für jede Teilmenge $M \subseteq X$ entweder M oder $X \setminus M$ enthält (aber nicht beide).

(Auf $X = \emptyset$ erfüllt $\uparrow\emptyset$ die Bedingung nicht.)

Beweis:

Bemerke zunächst: Wegen Schnittaxiom kann nur der falsche Filter sowohl M als auch $X \setminus M$ enthalten.

($\Leftarrow$) Hat $\mathcal{F}$ die angegebene Eigenschaft, ist $\mathcal{F}$ echt. Ist $\mathcal{G} < \mathcal{F}$, so existiert $M \subseteq X$ mit $M \in \mathcal{G}$ aber $M \notin \mathcal{F}$. Dann ist also $X \setminus M \in \mathcal{F}$, somit erst recht $X \setminus M \in \mathcal{G}$. Also $\mathcal{G} = \uparrow\emptyset$.

($\Rightarrow$) Montag. □