Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Alexander Samokhin

Sommersemester 2015
2.6.2015

Topologie I
Blatt 9

---

31 | Gehopft wie gespringt

Es ist $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ und $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Insbesondere haben wir Faserbündel, die sogenannten Hopfbündel, der folgenden Form:

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r] & S^1 \arrow[d] \\ & S^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^3 \arrow[d] \\ & S^2 \end{tikzcd}$$

(Der Raum oben links gibt in dieser Notation jeweils die Faser des senkrecht geschriebenen Bündels an.)

32 | Haarspaltereien

Ist B eine abelsche Gruppe, die in einer kurzen Sequenz abelscher Gruppen der Form

$$0 \to A \to B \to \mathbb{Z}^n \to 0$$

auftritt, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}^n$. Welche abelschen Gruppen B passen in eine kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z} \to B \to \mathbb{Z}/2 \to 0$?

33 | Mehrzeller

Der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ lässt sich aus dem reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^{n-1}$ durch „Anheften einer n-Zelle" konstruieren. Das heißt, dass es ein Pushoutdiagramm der folgenden Form gibt:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, tail] \arrow[d] & D^n \arrow[d] \\ \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r, tail] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

Hier ist die obere Kofaserung die Inklusion der Sphäre S^{n-1} in D^n als Rand. Der linke vertikale Pfeil ist das Faserbündel aus Aufgabe 22, die kanonische zweifache Überlagerung.

34 | Vergleich

Wir werden zeigen $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Aus diesem Resultat folgt:

$$\pi_n(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$
$$\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Um den Korrekturservice zu nutzen, versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen, heften Sie sie zusammen und geben Sie sie in der nächsten Übung ab (10.6.2015, 16:30 Uhr in 25.22.00.72).