

Topologie I

Blatt 10

35 | Glasperlen

Alle Homotopiegruppen von $\mathbb{C}P^n$ lassen sich durch Homotopiegruppen von Sphären ausdrücken.

36 | Komplexer Mehrzeller

Der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ ist ein Zellkomplex mit einer d -Zelle für jedes $d \in \{0, 2, \dots, 2n\}$.

37 | Unendliche Weiten

Genau wie die unendlich-dimensionale Sphäre S^∞ können wir auch unendlich-dimensionale reelle und komplexe projektive Räume definieren:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^\infty &:= \operatorname{colim} \left(\mathbb{R}P^0 \hookrightarrow \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \dots \right) \\ \mathbb{C}P^\infty &:= \operatorname{colim} \left(\mathbb{C}P^0 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2 \hookrightarrow \dots \right)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir Faserbündel:

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}P^\infty \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

38 | Einfältig

Ein **Eilenberg-MacLane-Raum** ist ein zusammenhängender Raum mit genau einer nicht-trivialen Homotopiegruppe. Genauer schreiben wir $K(\pi, n)$ für einen zusammenhängenden Raum mit

$$\begin{aligned}\pi_n(K(\pi, n)) &= \pi, \\ \pi_i(K(\pi, n)) &= 0 \text{ für } i \neq n.\end{aligned}$$

Hierbei ist n eine beliebige vorgegebene natürliche Zahl und π eine Gruppe, abelsch falls $n \geq 2$.

Zum Beispiel sind $\mathbb{R}P^\infty$ und $\mathbb{C}P^\infty$ Eilenberg-MacLane-Räume – für welche Gruppen π und welche Werte n ? Gibt es weitere Eilenberg-MacLane-Räume, die bereits in der Vorlesung auftauchten?