

Topologie I, Blatt 0

1. Verdickung.

Seien X, Y und Z topologische Räume, $f : X \times Y \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung, $L \subset Y$ eine kompakte und $O \subset Z$ eine offene Teilmenge. Dann existiert zu jedem Punkt $x \in X$ mit

$$f(x \times L) \subset O$$

eine Umgebung U von x , sodass sogar $f(U \times L)$ ganz in O enthalten ist.

Lösung.

Die Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$ ist gegeben durch die Familie der offenen Mengen $\mathcal{U}_X \times \mathcal{V}_Y$, wobei $\mathcal{U}_X$ (bzw., $\mathcal{V}_Y$) eine offene Menge auf X (bzw. auf Y) ist. Die Teilmenge L von Y ist nach der gegebenen Annahme kompakt, und daraus folgt die Teilmenge $x \times L$ von $X \times Y$ ist kompakt. Man betrachte einen beliebigen Punkt $l \in L$. Da f eine stetige Abbildung ist, existiert eine Umgebung $\mathcal{U}_{x \times l}$ von $x \times l$, so dass $f(\mathcal{U}_{x \times l})$ in O enthalten ist. Darüber hinaus, können wir eine Umgebung $\mathcal{U}_{x \times l}$ finden, mit der Form $\mathcal{U}_x^l \times \mathcal{V}_l$, wobei $\mathcal{U}_x^l$ ist ein Umgebung von x , und $\mathcal{V}_l$ ist ein Umgebung von $l \in L$ ⁱ. Die Familie der offenen Mengen $\mathcal{U}_x^l \times \mathcal{V}_l$ bilden eine Überdeckung von $x \times L$. Da $x \times L$ kompakt ist, kann man ein endlich Teilüberdeckung finden. Sei $i = 1, \dots, N$ die Menge der Indizes die zur endlichen Teilüberdeckung gehören. Daraus erhalten wir eine Inklusion $x \times L \subset \bigcup_{i=1}^{i=N} \mathcal{U}_x^{l_i} \times \mathcal{V}_{l_i}$. Man betrachte eine Menge $\bigcap_{i=1}^{i=N} \mathcal{U}_x^{l_i}$. Es ist keine leer Menge, da jede offene Menge $\mathcal{U}_x^{l_i}$ den Punkt x enthält, und sie ist offen, da jeder endliche Durchschnitt von offene Mengen offen ist. Setze $\mathcal{U}_x := \bigcap_{i=1}^{i=N} \mathcal{U}_x^{l_i}$. Dann erfüllt $\mathcal{U}_x$ die benötigte Bedingung der Aufgabe. Tatsächlich, ist $\mathcal{U}_x \times L$ in $\bigcup_{i=1}^{i=N} \mathcal{U}_x^{l_i} \times \mathcal{V}_{l_i}$ enthalten, und für jede $i = 1, \dots, N$ erhält man $f(\mathcal{U}_x^{l_i} \times \mathcal{V}_{l_i}) \subset O$. Deshalb,

$$f(\mathcal{U}_x \times L) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{i=N} \mathcal{U}_x^{l_i} \times \mathcal{V}_{l_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{i=N} f(\mathcal{U}_x^{l_i} \times \mathcal{V}_{l_i}) \subset O.$$

□

ⁱDer oberer Index l von $\mathcal{U}_x^l$ dient zur verdeutlichung der Abhängigkeit von $\mathcal{U}_x^l$ zu dem Punkt l