

## Topologie I Blatt 2

---

### 5 | Metamorphismen

Seien  $f_1, f_2: G \rightrightarrows H$  zwei Gruppenhomomorphismen. Wenn wir  $G$  und  $H$  als Kategorien und  $f_1$  und  $f_2$  als Funktoren auffassen, was ist dann eine natürliche Transformation  $f_1 \rightsquigarrow f_2$ ?

### 6 | Wege nach Rom

Ist  $X$  wegzusammenhängend, so definiert der kanonische Inklusionsfunctor für jeden beliebigen Punkt  $x$  von  $X$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$i: \pi_1(X, x) \rightarrow \Pi(X).$$

Wie sieht ein Functor  $G: \Pi(X) \rightarrow \pi_1(X, x)$  in umgekehrter Richtung aus, der eine Äquivalenz definiert? Wodurch sind natürliche Isomorphismen  $\text{Id}_{\Pi(X)} \rightsquigarrow iG$  und  $Gi \rightsquigarrow \text{Id}_{\pi_1(X, x)}$  gegeben?

### 7 | Punktgewinn

Es gibt einen Functor  $\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op_{\bullet}$ , der einem Raum  $X$  den Raum  $X \coprod \{\bullet\}$  mit dem ausgezeichneten Basispunkt  $\bullet$  zuordnet. Dieser ist linksadjungiert zum vergesslichen Functor  $\mathcal{T}op_{\bullet} \rightarrow \mathcal{T}op$ .

Gibt es auch einen Rechtsadjungierten zum vergesslichen Functor?

### 8 | Hauptdarsteller

(a) Für eine (lokal kleine) Kategorie  $\mathcal{C}$  und ein Objekt  $X$  in  $\mathcal{C}$  gibt es einen Functor

$$\mathcal{C}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et,$$

der für Objekte durch die Zuordnung  $Y \mapsto \mathcal{C}(Y, X)$  und für Morphismen durch die Zuordnung

$$(f: Z \rightarrow Y) \mapsto \begin{pmatrix} f^*: \mathcal{C}(Y, X) \rightarrow \mathcal{C}(Z, X) \\ g \mapsto g \circ f \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ein Functor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , der natürlich isomorph zum Functor  $\mathcal{C}(-, X)$  ist, heißt **darstellbar** durch das Objekt  $X$ .

(b) Der Functor  $\mathcal{T}op^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , der einem Raum  $Y$  seine Topologie  $\mathcal{O}(Y)$  zuordnet, also die Menge aller offenen Teilmengen von  $Y$ , und der eine stetige Abbildung  $f: Z \rightarrow Y$  wirft auf die Urbildabbildung  $f^{-1}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(Z)$ , ist darstellbar durch den Zweipunktraum  $X := \{0, 1\}$  mit der Topologie  $\mathcal{O}(X) := \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ .