

Topologie I Blatt 12

45 | Phantomkomplex

Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen, der auf der Homologie die Nullabbildung induziert, kettenhomotop zur Nullabbildung? Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen, der auf der Homologie Isomorphismen induziert, eine Kettenhomotopieäquivalenz?

46 | Take Five!

In folgendem kommutativen Leiterdiagramm von Moduln und Modulhomomorphismen seien die Zeilen kurze exakte Sequenzen:

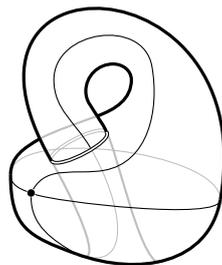
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sind die beiden äußeren Homomorphismen α und γ Isomorphismen, so ist auch der mittlere Homomorphismus β ein Isomorphismus. Gilt auch die Umkehrung?

Wir werden die Homologie eines Zellkomplexes als die Homologie seines zellulären Kettenkomplexes definieren. Das ist in den nachfolgenden beiden Aufgaben bereits zu verwenden.

47 | Windungen

Welche Homologie hat die Kleinsche Flasche?



48 | Sisyphos ...

... wusste fast nichts über die Homologie topologischer Räume, kannte aber erstaunlicherweise unsere Definition mittels des zellulären Kettenkomplexes. Die Homologie von \mathbb{R} konnte er dementsprechend nur mit Hilfe einer Zellerlegung berechnen. Achilleus, dem die Rechnungen von Sisyphos in die Hände gerieten, wurde von ihnen zu einem Beweis der folgenden Aussage inspiriert:

Für jeden zusammenhängenden Zellkomplex X ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Leider sind beide Manuskripte verloren gegangen. Können Sie sie rekonstruieren?

Abgabefrist: 22.01.2020, 10:30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den Briefkasten auf Ebene 25.22.00 ein.