XX

Topologie I: Klausur 1

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2024/2025

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 20 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					/80

1 | Grundbegriffe (20 Punkte)

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume.

(a) Definieren Sie, was eine (unpunktierte) Kofaserung ist.

(b) Definieren Sie, was eine (unpunktierte) Faserung ist.

(c) Entscheiden Sie, ob die Inklusion $i\colon \{0\} \hookrightarrow [0,1]$ eine Kofaserung ist. Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

(d) Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen, und $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die zweite Koordinate. Entscheiden Sie, ob π eine Faserung ist. Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 1
(Seite 3)

Aufgabe 1
(Seite 5)

2 | Abbildungswegeraum (20 Punkte)

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume. Bekanntlich lässt sich jede Abbildung $f\colon X \to Y$ bis auf Homotopie durch eine Faserung $Ef \to Y$ ersetzen. In dieser Aufgabe soll die Abbildung $Ef \to Y$ explizit konstruiert und nachgewiesen werden, dass es sich tatsächlich um eine Faserung handelt.

(a) Definieren Sie den Abbildungswegeraum Ef einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$. Elemente sollten die Form (β, x) haben, wobei β ein Weg in einem geeigneten Raum und $x \in X$ ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Abbildung $(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)\colon Y^I \to Y \times Y$, die $\gamma \in Y^I$ abbildet auf das Paar $(\gamma(0), \gamma(1))$, eine Faserung ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Inklusion $\{0,1\} \to I$ eine Kofaserung ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Abbildungswegeraum Ef aus (a) und die Abbildung aus (b) in ein Pullback-Quadrat der folgenden Form passen:

$$\begin{tikzcd} Ef \arrow[r] \arrow[d, "{(\pi_X, \mathrm{ev}_1)}"'] & Y^I \arrow[d, "{(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)}"] \\ X \times Y \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_Y"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

Hier ist $(\pi_X, \mathrm{ev}_1) : Ef \to X \times Y$ die Abbildung, die (β, x) abbildet auf $(x, \beta(1))$.

Sie dürfen bei Bedarf ohne Beweis verwenden, dass das folgende Quadrat, in dem π_1 jeweils die Projektion auf die erste Koordinate bezeichnet, ein Pullback-Quadrat ist:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_Y"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \times Y \arrow[d, "\pi_1"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $(\pi_X, \mathrm{ev}_1)\colon Ef \to X \times Y$ aus (c) eine Faserung ist.

(e) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{ev}_1\colon Ef \to Y$, die (β, x) abbildet auf $\beta(1)$, eine Faserung ist.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben. Eine Ausnahme hiervon ist die Aussage in Teil (e) – diese soll hier bewiesen, nicht einfach aus der Vorlesung zitiert werden.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2
(Seite 7)

Aufgabe 2

Aufgabe 2
(Seite 9)

3 | Puppe (20 Punkte)

In dieser Aufgabe arbeiten in der Kategorie der punktierten lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume. Es seien also alle Räume, Abbildungen, Homotopien und Konstruktionen punktiert, und wir schreiben $f \simeq g$ für „f ist punktiert homotop zu g“. Es seien $X = (X, x_0)$ und $Y = (Y, y_0)$ punktierte Räume, und $f\colon X \to Y$ sei eine punktierte stetige Abbildung.

(a) Definieren Sie den punktierten Kegel $C_\bullet X$, die punktierte Einhängung $\Sigma_\bullet X$ und den punktierten Abbildungskegel $C_\bullet(f)$.

(b) Definieren Sie die Puppe-/Kofasersequenz zu f.

(c) Formulieren Sie ausführlich den Satz über die Exaktheit der Puppe-/Kofasersequenz aus der Vorlesung.

(d) Zeigen Sie, dass für eine punktierte Kofaserung $i\colon (A, a) \rightarrowtail (X, a)$ die induzierte Abbildung $C_\bullet(i) \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz ist. Sie können ohne Beweis verwenden, dass punktierte Kegel über punktierten Räumen zusammenziehbar sind.

(e) Sei $i\colon A \to X$ eine punktierte Kofaserung, und $q\colon X \to X/A$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie: Zu einer punktierten Abbildung $f\colon X \to Z$ existiert genau dann eine punktierte Abbildung $\bar{f}\colon X/A \to Z$ mit $\bar{f} \circ q \simeq f$, wenn $f \circ i$ homotop zur konstanten Abbildung ist.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben. Eine Ausnahme hiervon sind die Aussage in den Teilen (d) und (e) – diese sollen hier auf allgemeinere Aussagen zurückgeführt, nicht einfach zitiert werden.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3
(Seite 11)

Aufgabe 3
(Seite 13)

4 | Kreuze (20 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus insgesamt 4 Teilaufgaben. Kreuzen Sie bei jeder Aussage an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Je Teilaufgabe erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume.

Teilaufgabe (a)

(w) (f)

☺ ☹ Die Inklusion des Randes S^2 in die abgeschlossene Einheitsscheibe D^3 ist ein Umgebungsdeformationsretrakt.

☺ ☹ Die Inklusion eines beliebigen Unterraums in $\mathbb{R}$ ist ein Umgebungsdeformationsretrakt.

☺ ☹ Jede Komposition von zwei Umgebungsdeformationsretrakten ist ein Umgebungsdeformationsretrakt.

☺ ☹ Jeder Umgebungsdeformationsretrakt ist eine Homotopieäquivalenz.

☺ ☹ Ist $i\colon A \to X$ ein Umgebungsdeformationsretrakt, so ist auch die Inklusion des Punktes A/A in den Raum X/A („Zusammenschlagen von A zu einem Punkt") ein Umgebungsdeformationsretrakt.

Teilaufgabe (b)

(w) (f)

☺ ☹ Jeder Zellkomplex ist wegzusammenhängend.

☺ ☹ Es gibt einen Zellkomplex ohne 1-Zellen, für den gilt $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/2$.

☺ ☹ Ist X ein einfach-zusammenhängender Zellkomplex, so besitzt X eine Zellstruktur ohne 1-Zellen.

☺ ☹ Es gibt einen 3-zusammenhängenden Zellkomplex, für den gilt $\pi_4(X) \cong \mathbb{Z}$.

☺ ☹ Es gibt einen Zellkomplex, der in jeder Dimension abzählbar-undendlich viele Zellen besitzt.

Teilaufgabe (c)

(w) (f)

☺ ☹ Jede Homotopieäquivalenz zwischen Zellkomplexen ist eine schwache Äquivalenz.

☺ ☹ Jede schwache Äquivalenz zwischen Zellkomplexen ist eine Homotopieäquivalenz.

☺ ☹ Jeder Raum ist homotopieäquivalent zu einem Zellkomplex.

☺ ☹ Zu jeden Raum X existiert eine Zellkomplex X' und eine schwache Äquivalenz $X \to X'$.

☺ ☹ Zu jeder stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ existiert eine Kofaserung $f'\colon X \to Y'$ und eine Homotopieäquivalenz $h\colon Y' \to Y$ mit $h \circ f' = f$.

Teilaufgabe (d)

(w) (f)

☺ ☹ Es gibt nicht-triviale Faserbündel mit Faser S^0.

☺ ☹ Es gibt ein Faserbündel $S^3 \to S^2$ mit Faser S^1.

☺ ☹ Es gibt ein Faserbündel $S^3 \to S^2$ mit Faser $S^1 \vee S^1$.

☺ ☹ Der Raum $\mathbb{C}P^n$ ist einfach-zusammenhängend für $n \geq 1$.

☺ ☹ Jedes numerable Faserbündel ist eine Faserung.

Hinweis: Jede der hier auftretenden Faserungen $p\colon E \to B$ definiert auch eine punktierte *Faserung $(E, e) \to (B, p(e))$, für jeden Punkt $e \in E$.*

Bitte prüfen Sie abschließend die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name:
Matrikelnr.: