



Topologie I: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2024/2025

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 20 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					/80

1 | Reelle projektive Räume

(20 Punkte)

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume.

- (a) Definieren Sie den Begriff eines Faserbündels.
- (b) Definieren Sie für $n \geq 1$ den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ als Quotienten der Sphäre S^n .
- (c) Zeigen Sie anhand der Definitionen, dass die Quotientenabbildung $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ein Faserbündel ist.

Tatsächlich handelt es sich sogar um ein numerables Faserbündel. Das können Sie im Folgenden ohne Beweis verwenden.

- (d) Geben Sie explizit ein Faserbündel $S^1 \rightarrow S^1$ mit Faser S^0 an.
- (e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^1$ homöomorph zu S^1 ist.
- (f) Geben Sie ohne Beweis alle Homotopiegruppen $\pi_i(\mathbb{R}P^1)$ an.
- (g) Geben Sie die lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen für ein numerables Faserbündel an.
- (h) Berechnen Sie die Homotopiegruppen $\pi_i(\mathbb{R}P^n)$ für alle $n \geq 2$ und für $i = 1, \dots, n$.
- (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ nicht homöomorph zu S^2 ist.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

2 | Abbildungstorus

(20 Punkte)

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume; X sei ein beliebiger Raum und $f: X \rightarrow X$ eine Abbildung in dieser Kategorie.

- (a) Definieren Sie den Begriff der Kofaserung.
- (b) Zeigen Sie, dass die Inklusion $X \sqcup X \rightarrow X \times [0, 1]$, die auf dem ersten Summanden durch $x \mapsto (x, 0)$ und auf dem zweiten Summanden durch $x \mapsto (x, 1)$ gegeben ist, eine Kofaserung ist.
- (c) In der Vorlesung wurde ein Satz über die Stabilität von Kofaserungen unter Pushouts gezeigt. Formulieren Sie den Satz und beweisen Sie ihn.

Der **Abbildungstorus** $T(f)$ ist der Quotient des Zylinders $X \times [0, 1]$ modulo der von folgender Relation $\sim$ erzeugten Äquivalenzrelation: $(x, 0) \sim (f(x), 1)$ für alle $x \in X$. Für einen Punkt $(x, t) \in X \times [0, 1]$ sei $[x, t]$ die entsprechende Äquivalenzklasse in $T(f)$.

- (d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $X \rightarrow T(f)$, die durch $x \mapsto [x, 0]$ gegeben ist, eine Kofaserung ist.

Tipp: Versuchen Sie zunächst, $T(f)$ als Pushout zu beschreiben.

- (e) Wir nehmen nun an, dass die Abbildung f einen Fixpunkt besitzt. Konstruieren Sie unter dieser Annahme eine stetige injektive Abbildung $i: S^1 \rightarrow T(f)$.
- (f) Wir nehmen weiterhin an, dass f einen Fixpunkt besitzt. Entscheiden Sie, ob $T(f)$ zusammenziehbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Die letzten beiden Aufgabenteile sind von Teil (d) unabhängig.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben. Eine Ausnahme hiervon ist die Aussage in Teil (c), die offenbar hier bewiesen werden soll.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

3 | Whitehead

(20 Punkte)

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume.

- (a) Definieren Sie für $n \geq 1$, was es für einen topologischen Raum bedeutet, n -zusammenhängend zu sein. Definieren Sie ferner den Begriff der n -Äquivalenz und den Begriff der schwachen Äquivalenz.

Im Folgenden bezeichnet $[X, Y]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y . In der Vorlesung wurde gezeigt:

Ist $e: Y \rightarrow Z$ eine schwache Äquivalenz, so ist $e_: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ für jeden Zellkomplex X bijektiv.*

Ist $e: Y \rightarrow Z$ eine n -Äquivalenz, so ist $e_: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ für jeden Zellkomplex X der Dimension n surjektiv und für jeden Zellkomplex der Dimension kleiner als n bijektiv.*

Diesen Satz dürfen Sie in den folgenden Teilaufgaben benutzen.

- (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Whitehead über schwache Äquivalenzen zwischen Zellkomplexen.
- (c) Sei Y ein n -zusammenhängender Raum, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass jede Abbildung von einem Zellkomplex der Dimension $\leq n$ nach Y homotop zu einer konstanten Abbildung ist.
- (d) Geben Sie ein Beispiel für zwei Räume X und Y an derart, dass weder X noch Y zusammenziehbar sind, aber für die jede Abbildung $X \rightarrow Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

4 | Kreuze

(20 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus insgesamt 4 Teilaufgaben. Kreuzen Sie bei jeder Aussage an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Je Teilaufgabe erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume.

Teilaufgabe (a)

(w) (f)

- ☐ Sind $E_1 \rightarrow B_1$ und $E_2 \rightarrow B_2$ Faserbündel, so ist auch das Produkt $E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ ein Faserbündel.
- ☐ Jede Faserung ist ein Faserbündel.
- ☐ Jede Überlagerung ist ein Faserbündel.
- ☐ Sie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitssphäre. Die Projektion auf die x -Koordinate $S^1 \rightarrow [-1, 1]$ ist ein Faserbündel.
- ☐ Sie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitssphäre. Die Projektion auf die x -Koordinate $S^1 \rightarrow [-1, 1]$ ist eine Faserung.

Teilaufgabe (b)

Der Wegeraum Ep einer stetigen Abbildung $p: E \rightarrow B$ ist bekanntlich das folgende Faserprodukt.

$$\begin{array}{ccc} Ep & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ B^I & \xrightarrow{\text{ev}_0} & B \end{array}$$

Hier ist ev_0 die Abbildung, die einen Weg auf seinen Anfangspunkt abbildet.

(w) (f)

- ☐ Die Abbildung p ist genau dann eine Faserung, wenn ein stetiger Schnitt $Ep \xleftarrow{s} E$ der Abbildung $Ep \xrightarrow{\pi_E} E$ oben im Diagramm existiert (also eine stetige Abbildung s derart, dass gilt: $\pi_E \circ s = \text{id}$.)
- ☐ Die Abbildung p ist genau dann eine Faserung, wenn die von p induzierte Abbildung $p^I: E^I \rightarrow B^I$ durch $Ep \rightarrow B^I$ faktorisiert.
- ☐ Die Abbildung $\text{ev}_0: B^I \rightarrow B$ ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☐ Die Abbildung $Ep \rightarrow E$ oben im Diagramm ist für jede stetige Abbildung p eine Homotopieäquivalenz.
- ☐ Ist p eine Faserung, so ist die Abbildung $Ep \rightarrow B^I$ links im Diagramm eine Faserung.

Teilaufgabe (c)

(w) (f)

- ⊙ Für jeden Raum X ist die Inklusion in den Kegel $X \rightarrow CX$ eine Homotopieäquivalenz.
- ⊙ Für jeden Raum X ist die Inklusion in den Kegel $X \rightarrow CX$ eine Kofaserung.
- ⊙ Jeder Kegel CX ist zusammenziehbar.
- ⊙ Seien $A \rightarrow X$ und $A \rightarrow Y$ Kofaserungen derart, dass X und Y zusammenziehbar sind, so ist auch die Verklebung $X \sqcup_A Y$ zusammenziehbar.
- ⊙ Sei $S^1 \subset S^2$ der Äquator. Die kanonische Abbildung $S^2 \rightarrow S^2/S^1$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Teilaufgabe (d)

(w) (f)

- ⊙ Es gibt einen Zellkomplex, der in jeder Dimension genau eine Zelle besitzt.
- ⊙ Es gibt auf CP^3 eine Zellstruktur, in der alle Zellen gerade Dimension haben.
- ⊙ Es gibt auf RP^3 eine Zellstruktur, in der alle Zellen gerade Dimension haben.
- ⊙ Es gibt auf S^3 eine Zellstruktur mit jeweils genau zwei d -Zellen für jedes $d \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- ⊙ Es gibt auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ eine endliche Zellstruktur.

Bitte prüfen Sie abschließend die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name:

Matrikelnr.: