

Topologie I

Test 1

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Kreuzen Sie bei jeder Aussage an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Je Aufgabe erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

In den Aufgaben 1, 2 und 3 können Sie wahlweise in der Kategorie aller topologischen Räume oder in der Kategorie der lokal-kompakt-erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume arbeiten.

Aufgabe 1

(w) (f)

- ☐ Jeder Unterraum eines Hausdorff-Raums ist ein Hausdorff-Raum.
- ☐ Jeder Unterraum eines kompakten Raums ist ein kompakter Raum.
- ☐ Jeder kompakte Unterraum eines Hausdorff-Raums X ist in X abgeschlossen.
- ☐ Jeder kompakte Unterraum eines kompakten Raums X ist in X abgeschlossen.
- ☐ Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist lokal kompakt.

Aufgabe 2

Wir schreiben $\underline{\text{Top}}(X, Y)$ für die Menge $\text{Top}(X, Y)$ aller stetigen Abbildungen von X nach Y , ausgestattet mit der KO-Topologie. Für eine beliebige Menge S sei δS die Menge S ausgestattet mit der diskreten Topologie.

(w) (f)

- ☐ Die KO-Topologie auf $\underline{\text{Top}}(X, Y)$ ist nur definiert, wenn Y lokal kompakt ist.
- ☐ Es ist $\underline{\text{Top}}(\delta\{0, 1\}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$.
- ☐ Es ist $\underline{\text{Top}}(S^1, S^1) \cong \delta\mathbb{Z}$.
- ☐ Ist X endlich und Y diskret, so ist $\underline{\text{Top}}(X, Y)$ diskret.
- ☐ Ist X diskret und Y endlich, so ist $\underline{\text{Top}}(X, Y)$ diskret.

Aufgabe 3

Wir nennen einen Unterraum $A \subset X$ einen Retrakt von X , wenn die Inklusion $A \hookrightarrow X$ ein (stetiger) Retrakt im Sinne der Vorlesung ist.

(w) (f)

- ☐ Das offene Intervall $(0, 1)$ ist ein Retrakt in $\mathbb{R}$.
- ☐ Das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ ist ein Retrakt in $\mathbb{R}$.
- ☐ Der Nullpunkt $\{0\}$ ist ein Retrakt in $\mathbb{R}$.
- ☐ Der Kreis S^1 ist ein Retrakt in der gelochten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- ☐ Die 2-Sphäre S^2 ist ein Retrakt im Raum $\mathbb{R}^3$.

In den Aufgaben 4 und 5 arbeiten wir in der Kategorie der lokal-kompakt-erzeugten Schwach-Hausdorff-Räume.

Aufgabe 4

(w) (f)

- ☺ Für jeden abgeschlossene Unterraum $A \subset X$ ist die Einbettung $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung.
- ☺ Jede Homotopieäquivalenz ist eine Kofaserung.
- ☺ Die Projektion auf die zweite Koordinate $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Kofaserung.
- ☺ Die Einbettung eines beliebigen Punktes in die 3-Sphäre S^3 ist eine Kofaserung.
- ☺ Jede Kofaserung ist eine Einbettung eines Unterraums.

Aufgabe 5

(w) (f)

- ☺ Jede Komposition von zwei Umgebungsdeformationsretrakten ist ein Umgebungsdeformationsretrakt.
- ☺ Jeder Umgebungsdeformationsretrakt ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☺ Jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ lässt sich schreiben als eine Komposition $f = h \circ i$, wobei i eine Kofaserung und h ein Homöomorphismus ist.
- ☺ Ist $i: A \rightarrow X$ ein Umgebungsdeformationsretrakt, so ist auch die Inklusion des Punktes A/A in den Raum X/A („Zusammenschlagen von A zu einem Punkt“) ein Umgebungsdeformationsretrakt.
- ☺ Die Inklusion des Randes S^1 in die abgeschlossene Einheitsscheibe D^2 ist ein Umgebungsdeformationsretrakt.

NAME IN DRUCKBUCHSTABEN:

Topologie I

Test 2

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Kreuzen Sie bei jeder Aussage an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Je Aufgabe erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Wie immer sind alle Abbildungen stetig.

Aufgabe 1

(w) (f)

- ☐ Seien $X \subset \mathbb{R}^2$ und $Y \subset \mathbb{R}^2$ die x-Achse und die y-Achse. Die Einbettung $X \subset X \cup Y$ ist eine Kofaserung.
- ☐ Jede Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Kofaserung.
- ☐ Jeder Homöomorphismus ist eine Kofaserung.
- ☐ Für jede Kofaserung $i: A \rightarrow X$ ist die Einschränkung $i: A \rightarrow i(A)$ ein Homöomorphismus.
- ☐ Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ lässt sich schreiben als eine Komposition $f = h \circ i$, wobei i eine Kofaserung und h eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 2

(w) (f)

- ☐ Sei X ein Raum und seien $x_0, x_1 \in X$ zwei Punkte. Ist die Inklusion $\{x_0, x_1\} \rightarrow X$ eine Kofaserung, so sind je zwei Wege von x_0 nach x_1 in X homotop via eine Homotopie, die Anfangs- und Endpunkt fixiert lässt.
- ☐ Seien (X_0, x_0) und (X_1, x_1) punktierte Räume derart, dass die Abbildung $\{x_0\} \hookrightarrow X_0$ und $\{x_1\} \hookrightarrow X_1$ Kofaserungen sind. Existiert eine Homotopieäquivalenz $X_0 \rightarrow X_1$, so existiert auch eine Homotopieäquivalenz $X_0 \rightarrow X_1$, die x_0 auf x_1 abbildet.
- ☐ Seien (X_0, x_0) und (X_1, x_1) wie im vorherigen Aufgabenteil. Ist $f: X_0 \rightarrow X_1$ eine Homotopieäquivalenz, die x_0 auf x_1 abbildet, so bildet jedes Homotopieinverse von f den Punkt x_1 auf x_0 ab.
- ☐ Sei $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe. Sei (D^2, j) die Kreisscheibe aufgefasst als Raum unter S^1 , wobei $j: S^1 \rightarrow D^2$ die Inklusion des Randes ist. Die Abbildung $D^2 \rightarrow D^2, \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ ist eine Abbildung unter S^1 .
- ☐ Sei $f: D^2 \rightarrow D^2$ eine Selbstabbildung der Kreisscheibe, die eine Homotopieäquivalenz ist. Falls f jeden Punkt des Randes S^1 fixiert, so existiert auch ein Homotopieinverse g von f , das jeden Punkt des Randes fixiert, und es existieren Homotopien $g \circ f \rightsquigarrow \text{id}$ und $f \circ g \rightsquigarrow \text{id}$, die zu jedem Zeitpunkt jeden Punkt des Randes fixieren.

Aufgabe 3

(w) (f)

- ☺ Sei $*$ der Einpunktraum. Für jeden Raum X ist die Abbildung $X \rightarrow *$ eine Faserung.
- ☹ Für jeden Umgebungsdeformationsretrakt $A \subset X$ ist die kanonische Abbildung $X \rightarrow X/A$ („Zusammenschlagen von A zu einem Punkt“) eine Faserung.
- ☺ Für je zwei topologische Räume X und Y ist die kanonische Projektionsabbildung $X \times Y \rightarrow X$ eine Faserung.
- ☺ Sei X wegzusammenhängend. Jede Abbildung $A \rightarrow X$, die eine Faserung und eine Kofaserung ist, ist ein Homöomorphismus.
- ☹ Die Fasern einer Faserung sind notwendig wegzusammenhängend.

Aufgabe 4

Der Wegraum Ep einer Abbildung $p: E \rightarrow B$ ist bekanntlich das folgende Faserprodukt.

$$\begin{array}{ccc} Ep & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ B^I & \xrightarrow{\text{ev}_0} & B \end{array}$$

(w) (f)

- ☺ Die Abbildung $\text{ev}_0: B^I \rightarrow B$ ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☺ Die Abbildung $Ep \rightarrow E$ im Diagramm ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☺ Ist B der Einpunktraum, so ist die Abbildung $Ep \rightarrow E$ im Diagramm ein Homöomorphismus.
- ☹ Die Abbildung $Ep \rightarrow B^I$ links im Diagramm ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☺ Ist p eine Faserung, so ist auch die Abbildung $Ep \rightarrow B^I$ links im Diagramm eine Faserung.

Aufgabe 5

(w) (f)

- ☺ Jede Überlagerung ist ein Faserbündel.
- ☹ Jede Faserung ist ein Faserbündel.
- ☹ Jede Inklusion eines offenen Unterraums ist ein Faserbündel.
- ☹ Seien $X \subset \mathbb{R}^2$ und $Y \subset \mathbb{R}^2$ die x-Achse und die y-Achse. Die Projektion auf die x-Koordinate $X \cup Y \rightarrow X$ ist ein Faserbündel.
- ☹ Seien $X \subset \mathbb{R}^2$ und $Y \subset \mathbb{R}^2$ die x-Achse und die y-Achse. Die Projektion auf die x-Koordinate $X \cup Y \rightarrow X$ ist eine Faserung.

NAME IN DRUCKBUCHSTABEN:

Topologie I

Test 3

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Kreuzen Sie bei jeder Aussage an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Je Aufgabe erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Wie immer sind alle Abbildungen stetig.

Aufgabe 1

Sei $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die universelle Überlagerung, mit Faser $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

- (w) (f)
- ☐ Jede Schleife in S^1 lässt sich hochheben zu einer Schleife in $\mathbb{R}$.
 - ☐ Fasertransport entlang der Identität $S^1 \rightarrow S^1$ ist die Identität $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
 - ☐ Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$ lässt sich als Fasertransport entlang einer geeigneten Schleife in S^1 realisieren.
 - ☐ Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto -n$ lässt sich als Fasertransport entlang einer geeigneten Schleife in S^1 realisieren.
 - ☐ Sind α und β zwei Schleifen an $1 \in S^1$, mit zugehörigem Fasertransport τ_α und $\tau_\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, so ist der Fasertransport entlang der Hintereinanderausführung $\beta \star \alpha$ (erst α , dann β) gegeben durch die Komposition $\tau_\beta \circ \tau_\alpha$.

Aufgabe 2

- (w) (f)
- ☐ Der punktierte Schleifenraum $\Omega_\bullet(*)$ des Einpunktraums ist zusammenziehbar.
 - ☐ Der punktierte Schleifenraum $\Omega_\bullet(S^1)$ hat unendlich viele Wegekompenten.
 - ☐ Der punktierte Schleifenraum $\Omega_\bullet(S^1)$ ist zusammenziehbar.
 - ☐ Der punktierte Schleifenraum $\Omega_\bullet(\mathbb{R})$ hat unendlich viele Wegekompenten.
 - ☐ Der punktierte Schleifenraum $\Omega_\bullet(\mathbb{R})$ ist zusammenziehbar.

Aufgabe 3

Sei $[n]$ der folgende punktierte Raum: die zugrundeliegende Menge ist $\{1, \dots, n\}$, punktiert ist sie in 1, und die Topologie ist diskret.

- (w) (f)
- ☐ Der Abbildungsraum $\text{Top}_\bullet([n], [m])$ ist homöomorph zu $[m^{n-1}]$.
 - ☐ Der Abbildungsraum $\text{Top}_\bullet([n], [m])$ ist homöomorph zu $[(m-1)^{n-1}]$.
 - ☐ Das Smash-Produkt $[n] \wedge [m]$ ist homöomorph zu $[nm - n - m]$.
 - ☐ Das Smash-Produkt $[n] \wedge [m]$ ist homöomorph zu $[nm - 1]$.
 - ☐ Das Wedge-Produkt $[n] \vee [m]$ ist homöomorph zu $[m + n - 1]$.

Aufgabe 4

(w) (f)

- ☺ Die Einhängung ΣX lässt sich konstruieren als Verklebung von zwei Kegeln CX .
- ☺ Sei $\tilde{a}: X \rightarrow \Sigma X$ die kanonische Inklusion in die Einhängung, sozusagen als Äquator. Ist $f: X \rightarrow Y$ homotop zur konstanten Abbildung, so existiert eine Abbildung $\Sigma X \rightarrow Y$, deren Einschränkung auf $\tilde{a}(X)$ genau f ist.
- ☺ Sei $\tilde{a}: X \rightarrow \Sigma X$ wie im vorherigen Aufgabenteil. Die kanonische Abbildung $\Sigma X \rightarrow \Sigma X/\tilde{a}(X)$ ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☺ Jeder Kegel CX ist zusammenziehbar.
- ☺ Seien $A \rightarrow X$ und $A \rightarrow Y$ Kofaserungen derart, dass X und Y zusammenziehbar sind. Dann ist auch die Verklebung $X \sqcup_A Y$ zusammenziehbar.

Aufgabe 5

(w) (f)

- ☺ Sei $F \cong [0, 1]$ eine Faser des Mobiusbandes M , aufgefasst als Faserbündel $M \rightarrow S^1$. Die kanonische Abbildung $M \rightarrow M/F$ ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☺ Sei $p: E \rightarrow S^2$ ein Faserbündel mit Faser F . Sei $F_x \cong F$ die Faser über einem gewissen Punkt $x \in S^2$. Das Komplement $E \setminus F_x$ ist homotopieaquivalent zu F .
- ☺ Sei $p: E \rightarrow S^2$ ein Faserbündel mit Faser F . Die Faser F hat genauso viele Zusammenhangskomponenten wie E .
- ☺ Sei $p: X \times Y \rightarrow Y$ die kanonische Projektion auf die zweite Koordinate, aufgefasst als Faserbündel mit Faser X . In der von p induzierten langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen sind alle Randabbildungen konstant.
- ☺ Es gibt ein Faserbündel $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit Faser S^1 .

Hinweis: Jede der hier auftretenden Faserungen $p: E \rightarrow B$ definiert auch eine punktierte Faserung $(E, e) \rightarrow (B, p(e))$, für jeden Punkt $e \in E$.

NAME IN DRUCKBUCHSTABEN:

Topologie I

Test 4

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Kreuzen Sie bei jeder Aussage an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Je Aufgabe erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Wie immer sind alle Abbildungen stetig.

Aufgabe 1

Es gibt einen Zellkomplex mit ...

(w) (f)

- ☐ ... zwei 0-Zellen, keinen 1-Zellen, sieben 2-Zellen, und keinen weiteren Zellen.
- ☐ ... einer 0-Zellen, abzählbar unendlich vielen 1-Zellen, und keinen weiteren Zellen.
- ☐ ... genau zwei d -Zellen in jeder Dimension $d \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- ☐ ... keiner 0-Zelle und einer 1-Zelle
- ☐ ... 27 0-Zellen, zwei 1-Zellen, 13 20-Zellen und keinen weiteren Zellen.

Aufgabe 2

(w) (f)

- ☐ Je zwei Zellkomplexe mit derselben Anzahl an Zellen in jeder Dimension sind homöomorph.
- ☐ Je zwei Zellkomplexe mit derselben Anzahl an Zellen in jeder Dimension sind homotopieäquivalent.
- ☐ Je zwei endliche Zellstrukturen auf demselben topologischen Raum haben dieselbe Anzahl an Zellen.
- ☐ Jede Zellstruktur auf S^1 hat mindestens eine 1-Zelle.
- ☐ Jeder kompakte Zellkomplex ist endlich (im Sinne von: besitzt nur endlich viele Zellen).

Aufgabe 3

(w) (f)

- ☐ Jede Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei Zellkomplexen induziert einen Isomorphismus $\pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, fx)$, für jeden Basispunkt $x \in X$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$.
- ☐ Für einen Zellkomplex X sind die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X, x)$ bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Basispunkts $x \in X$.
- ☐ Ist X ein Zellkomplex mit nur einer 0-Zelle x_0 , so hängt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ nur von der Anzahl der 1-Zellen von X ab.
- ☐ Ein Zellkomplex ist genau dann wegzusammenhängend, wenn er nur eine 0-Zelle besitzt.
- ☐ Ist $A \subset X$ ein Unterkomplex eines Zellkomplexes, so ist für jedes $a \in A$ die induzierte Abbildung $\pi_n(A, a) \rightarrow \pi_n(X, a)$ injektiv.

Aufgabe 4

(w) (f)

- ☐ ☺ Es gibt ein Faserbündel $S^3 \rightarrow S^2$ mit Faser S^1 .
- ☐ ☹ Es gibt ein Faserbündel $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit Faser S^1 .
- ☐ ☹ Es gibt ein Faserbündel $S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$ mit zusammenziehbarer Faser.
- ☐ ☺ Es gibt ein Faserbündel $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ mit Faser S^1 .
- ☐ ☺ Es gibt ein Faserbündel $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit diskreter Faser.

Hinweis: Jede der hier auftretenden Faserungen $p: E \rightarrow B$ definiert auch eine punktierte Faserung $(E, e) \rightarrow (B, p(e))$, für jeden Punkt $e \in E$.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Angaben zu Homotopiegruppen sind richtig?

(w) (f)

- ☐ ☺ $\pi_7(S^1) = 0$
- ☐ ☹ $\pi_3(S^3 \setminus \{*\}) = 0$
- ☐ ☹ $\pi_2(S^2) = 0$
- ☐ ☺ $\pi_2(\mathbb{R}^2) = 0$
- ☐ ☹ $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = 0$

NAME IN DRUCKBUCHSTABEN:
