Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
07.04.2025

Topologie II
Blatt 1

---

1 | Kurz und klein

In der folgenden langen exakten Sequenz seien Morphismen σ_i gegeben, die die Morphismen α_i „spalten“: es gelte $\sigma_i \alpha_i = \mathrm{id}$ für alle i.

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & M''_{i+1} \arrow[dll, "\partial_{i+1}"] \\
M'_i \arrow[r, "\alpha_i"] & M_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[l, bend left, dashed, "\sigma_i"] & M''_i \arrow[dll, "\partial_i"] \\
M'_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] & \cdots \arrow[l, bend left, dashed, "\sigma_{i-1}"] &
\end{tikzcd}$$

Dann verschwinden alle ∂_i, und die kurzen exakten Sequenzen, die sich in jeder Zeile ergeben, sind isomorph zu den offensichtlichen kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to M'_i \to M'_i \oplus M''_i \to M''_i \to 0.$$

Insbesondere ist also zum Beispiel jeweils $M_i \cong M'_i \oplus M''_i$ und $M''_i \cong \ker \sigma_i$.

2 | Zellrechnung

In der Vorlesung wurde behauptet, für eine Zelltriade $(X; A, B)$ gelte stets

$$\frac{X}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}.$$

Allgemeiner gilt das für eine beliebige Überdeckung eines topologischen Raumes X durch zwei abgeschlossene Unterräume A, B.

[Wir haben immer eine stetige Bijektion $\bar{i}\colon B/(A \cap B) \to X/A$.
B abgeschlossen $\Rightarrow$ $i\colon B \hookrightarrow X$ abgeschlossen.
A abgeschlossen $\Rightarrow$ $X \to X/A$ abgeschlossen.
Also ist dann auch $\bar{i}$ abgeschlossen.]

3 | Mayer-Vietoris

In folgender kommutativer Leiter seien die Zeilen exakt und jeder dritte vertikale Pfeil wie angedeutet ein Isomorphismus:

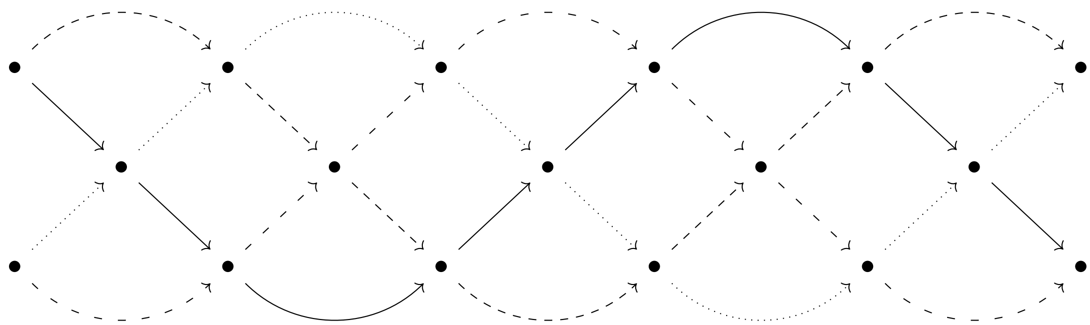
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_i \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A_i \arrow[r] \arrow[d] & B_i \arrow[r] \arrow[d] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & C_i \arrow[r] & D_i \arrow[r] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dann lässt sich eine lange exakte Sequenz basteln der Form

$$\cdots \to A_i \to B_i \oplus C_i \to D_i \to A_{i-1} \to \cdots.$$

4 | Zopf

Ein Zopfdiagramm ist ein kommutatives Diagramm aus vier wie folgt ineinander verwobenen Kettenkomplexen abelscher Gruppen:



Sind in einem solchen Zopfdiagramm drei der vier Komplexe exakt, so ist auch der vierte Komplex exakt.