Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
16.04.2025

Topologie II
Blatt 1

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Axiomatische Homologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Gibt es eine Homologietheorie mit $E_n(X, A) = \mathbb{Z}$ für alle Paare (X, A) und $n \in \mathbb{Z}$?
(b) Wahr oder falsch: Für eine Homologietheorie $(E_n)_n$ definiert auch $(E_{n+k})_n$ für $k \in \mathbb{Z}$ eine.
(c) Wahr oder falsch: Für eine Homologietheorien $(E_n)_n$, E'_n definiert auch $(E_n \oplus E'_n)_n$ eine.
(d) Wahr oder falsch: Es gilt $E_n(\emptyset) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
(e) Warum ist $(\pi_n \colon \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab})_{n \in \mathbb{N}_{\geq k}}$ keine Homologietheorie? (finden Sie möglichst viele Gründe)
(f) Wahr oder falsch: Für eine beliebige Homologietheorie ist $E_n(X) \oplus E_n(Y) \to E_n(X \amalg Y)$ ein Isomorphismus für alle X,Y und $n \in \mathbb{Z}$.
(g) Wahr oder falsch: Für eine reduzierte Homologietheorie $\tilde{E}_n$ gilt: $\tilde{E}_n(\{*\}) = 0$.

2 | Erste Rechnungen

Ziel dieser Aufgabe ist es die Homologie bestimmter Räume aus den Axiomen zu berechnen. Versuchen Sie die Homologie soweit wie möglich ohne die Verwendung von schwacher Äquivalenz und Additivität zu bestimmen. Sei E_n eine Homologietheorie.

(a) Berechnen Sie $E_n(\mathbb{R}^k)$ für $k \in \mathbb{N}$.
(b) Berechnen Sie $E_n(S^k)$ für $k \in \mathbb{N}$.
(Vergleiche Topologie I Blatt 13 Aufgabe 3, Mayer-Vietoris liefert einen neuen Ansatz)
(c) Berechnen Sie $E_n(\mathbb{R}^k \setminus \{*\})$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.