Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
14.05.2025

Topologie II
Blatt 5

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Simpliziale Homologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie viele simpliziale Komplexe mit $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ 0-Simplizes gibt es (bis auf Isomorphie)?

2 | Ein simplizialer Komplex

Betrachten Sie den folgenden simplizialen Komplex:

$$\begin{aligned} X = \{&\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \\ &\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{6,7\}, \\ &\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die simpliziale Homologie $H_*^{\Delta}(X; R)$.
(b) Zeichnen Sie die geometrische Realisierung $|X|$.
(c) Erklären Sie das Ergebnis Ihrer Homologieberechnung.

3 | Smith Normalform

Sei $0 \neq A$ eine $m \times n$-Matrix über einem Hauptidealring R, dann gibt es Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $SAT = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$, wobei $\alpha_i | \alpha_{i+1}$ für alle $i = 1, \dots, r-1$. Die α_i sind eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten und heißen Elementarteiler.

(a) Berechnen Sie die Elementarteiler der folgenden Matrizen:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -6 & 6 & 12 \\ 10 & -4 & -16 \end{pmatrix}$$

Sei $R^n \xrightarrow{A} R^m \xrightarrow{B} R^k$ ein Komplex (d.h. $BA = 0$) und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathrm{rk}(A)}\}$ die Elementarteiler von A.

(b) Zeigen Sie, dass $\ker(B)/\operatorname{im}(A) \cong R^{m-\mathrm{rk}(A)-\mathrm{rk}(B)} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\mathrm{rk}(A)} R/(\alpha_i)$.
(c) Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$. Finden Sie eine Matrix A über $\mathbb{Z}$ mit Einträgen in $\{-1, 0, 1\}$ und Elementarteiler α.
(d) Warum ist H_0^{Δ} trotzdem immer frei?
(Argumentieren Sie basierend auf der Struktur des Differentials.)