Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
25.06.2025

Topologie II
Blatt 11

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Kohomologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Was genau sind die Voraussetzungen für Poincaré-Dualität?
(b) Was können Sie aus der Poincaré-Dualität für $H_k((S^1)^n;\mathbb{Z})$ folgern?
(c) Formulieren Sie die Natürlichkeit des Cap-Produkts aus.

2 | Eulercharakteristik

Sei X ein Raum mit endlicher Homologie (d.h. alle Homologiegruppen sind endlich erzeugt und fast alle sind trivial). Die Eulercharakteristik $\chi(X)$ von X ist definiert durch

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}(H_i(X;\mathbb{Z})).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(\text{Anzahl der } i\text{-Zellen})$, für endliche CW-Komplexe X.
(b) Zeigen Sie, dass $\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \operatorname{rk}_R(H_i(X;R))$ für alle Ringe R.
(c) Zeigen Sie, dass $\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}(H^i(X;\mathbb{Z}))$.
(d) Berechnen Sie die Eulercharakteristik von S^n, $(S^1)^n$, $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$.
(e) Sei M eine kompakte n-dim. Mannigfaltigkeit mit n ungerade. Zeigen Sie, dass $\chi(M) = 0$.

3 | Poincaré-Dualität

Sei M eine n-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie für $n = 2k$, dass die Torsionsanteile von $H_{k-1}(M;\mathbb{Z})$ und $H_k(M;\mathbb{Z})$ isomorph sind.
(b) Sei M eine 3-dimensionale kompakte orientierbare einfachzusammenhängende Mannigfaltigkeit. Bestimmen Sie die Homologie- und Kohomologiegruppen von M.