Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
02.07.2025

Topologie II
Blatt 12

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Fundamentalklassen und Eulercharakteristik

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie eindeutig ist die Fundamentalklasse einer n-dimensionalen kompakten R-orientierbaren Mannigfaltigkeit für $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$?
(b) Wahr oder falsch: $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

2 | Verbundene Summe

Seien M_1, M_2 n-dim. zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeiten. Seien $B_i \subseteq M_i$ abgeschlossene n-Bälle, die in größere Bälle in M_i einbetten. Definiere $M_1 \# M_2 := (M_1 \setminus \mathring{B}_1) \cup_f (M_2 \setminus \mathring{B}_2)$ für einen Homöomorphismus $f \colon \partial B_1 \to \partial B_2$.

(a) Zeigen Sie, dass $H_i(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}) \cong H_i(M_1; \mathbb{Z}) \oplus H_i(M_2; \mathbb{Z})$ für $1 \leq i \leq n-2$.
(b) Zeigen Sie, dass $H_{n-1}(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(M_1; \mathbb{Z}) \oplus H_{n-1}(M_2; \mathbb{Z})$, für M_1 oder M_2 orientierbar.
(c) Zeigen Sie, dass $H_{n-1}(M_1 \# M_2; \mathbb{Z})$ aus $H_{n-1}(M_1; \mathbb{Z}) \oplus H_{n-1}(M_2; \mathbb{Z})$ durch Ersetzen eines der beiden $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Summanden durch ein $\mathbb{Z}$ entsteht, für M_1 und M_2 nicht-orientierbar.
(d) Zeigen Sie, dass $\chi(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(S^n)$.

3 | Homologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Sei M eine kompakte zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit.

(a) Berechnen Sie $H_2(M; \mathbb{Z})$ in Abhängigkeit von $H_1(M; \mathbb{Z})$.
(b) Folgern Sie, aus (a) eine notwendige Bedingung an $H_1(M; \mathbb{Z})$ für Orientierbarkeit. (Betrachte Sie jetzt nochmal die Aufgabe 3 auf Blatt 11.)
(c) Zeigen Sie, dass es keine weiteren Relationen in der Homologie von M gibt. Konkret: Konstruieren Sie eine kompakte zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit M mit folgender Homologie:

$$H_i(M; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , i = 0 \\ \mathbb{Z}^{r+\varepsilon} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z} & , i = 1 \\ \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\varepsilon} & , i = 2 \\ \mathbb{Z}^{1-\varepsilon} & , i = 3 \end{cases}$$

für $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{N}_0$ und $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Z}$.
(Sie brauchen nicht zu zeigen, dass die Räumen $P = (S^2 \times I)/(x, 0) \sim (-x, 1)$ und der zum Kettenkomplex $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$ assoziierte Raum wirklich Mannigfaltigkeiten sind.)