Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
15.07.2025

Topologie II
Blatt 13

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Verschiedenes

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Es gibt eine orientierungsumkehrende Homotopieäquivalenz $\mathbb{CP}^{2n} \to \mathbb{CP}^{2n}$.
(b) Berechnen Sie $\chi((S^1 \times S^1)^{\#n})$ und $\chi((S^1 \times S^1)^{\#n} \# \mathbb{RP}^2)$.
(c) Wahr oder falsch: Eine $\mathbb{Z}$-orientierbare Mannigfaltigkeit ist auch R-orientierbar für einen beliebigen Ring R.

2 | Orientierungsüberlagerung

Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass es eine orientierbare zweiblättrige Überlagerung $\widetilde{M} \to M$ gibt.
(b) Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, wenn $\widetilde{M}$ zwei Komponenten besitzt.
(c) Wie sehen die Orientierungsüberlagerungen von S^n, $\mathbb{RP}^n$ und der Kleinschen Flasche aus?
(d) Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, wenn jedes offene $U \subseteq M$ orientierbar ist.
(e) Finden Sie eine notwendige Bedingung an $\pi_1(M)$ für die nicht-Orientierbarkeit von M. (Dies verbessert die Aussage von Blatt 12 Aufgabe 3 (b))

3 | Ähnlich aber anders: Kompakter Träger

Sei $C_c^i(X;G) \subseteq C^i(X;G) = \mathrm{Hom}(C_i(X;\mathbb{Z}), G)$ der Unterkomplex. der Koketten $\varphi\colon C_i(X;\mathbb{Z}) \to G$ für die es eine kompakte Menge $K_\varphi \subseteq X$ gibt, sodass φ auf allen Ketten in $X \setminus K_\varphi$ verschwindet. Definiere $H_c^i(X;G)$ als Kohomologie von $C_c^i(X;G)$.

(a) Zeigen Sie, dass $C_c^i(X;G)$ einen Kokettenkomplex definiert.
(b) Sei $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ die Vereinigung über eine gerichtete Menge von Unterräumen X_α, wobei jede kompakte Menge in einem X_α liegt. Zeigen Sie, dass $\mathrm{colim}_\alpha H_i(X_\alpha;G) \to H_i(X;G)$ ein Isomorphismus für alle $i \in \mathbb{Z}$ und G ist.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{colim}_{K \text{ kompakt}} H^i(X, X \setminus K; G) \cong H_c^i(X;G)$.
(d) Zeigen Sie, dass $H_c^i(X;G) = H^i(X;G)$ für X kompakt.
(e) Berechnen Sie $H_c^i(\mathbb{R}^n;G)$.
(f) Was fällt Ihnen an der vorherigen Berechnung auf? Finden Sie weitere überraschende Eigenschaften?
