

2. Exponentialgesetz

1. Satz & Def.:

Ist $f: X \times Y \longrightarrow Z$

stetig, so ist auch die adjungierte Abbildung

$$f^\#: X \longrightarrow \underline{\text{Top}}(Y, Z) \\ x \longmapsto (y \longmapsto f(x, y)) \quad \text{stetig.}$$

Beweis:

Sei $L \subseteq Y$ kompakt,

$\mathcal{O} \subseteq Z$ offen.

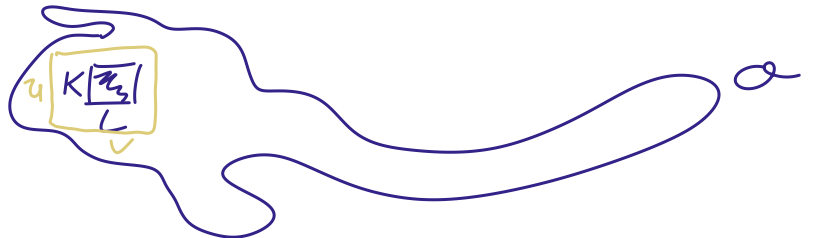
z.z.: $(f^\#)^{-1} M(L, \mathcal{O})$ ist offen in X .

Sei $x \in (f^\#)^{-1} M(L, \mathcal{O})$, also

$$\underbrace{\{x\} \times L}_{\text{kompakt}} \subseteq \underbrace{f^{-1}\mathcal{O}}_{\text{offen in } X \times Y}.$$

Nutze nun folgendes **Rechteckemma** (Blatt 1):

Jede offene Umgebung eines kompakten Rechtecks enthält eine rechteckige offene Umgebung desselben.



Wir finden also offene $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ sodass

$$\{x\} \times L \subseteq U \times V \subseteq f^{-1}\mathcal{O}.$$

Insbesondere ist also $U \times L \subseteq f^{-1}\mathcal{O}$,

also ist $U \subseteq (f^\#)^{-1} M(L, \mathcal{O})$

eine offene Umgebung von x . □

Für Abbildungen von Mengen haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Set}(X, \text{Set}(Y, Z)) & \cong & \text{Set}(X \times Y, Z) \\ f^\# & \longleftarrow & f \\ g & \longmapsto & (g^b: (x, y) \mapsto g(x)(y)) \end{array}$$

Obiger Satz besagt, dass sich die Abb. $(f^\# \longleftarrow f)$ einschränken zu

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}(X, \underline{\text{Top}}(Y, Z)) & \longleftarrow & \text{Top}(X \times Y, Z) \\ f^\# & \longleftarrow & f \end{array}$$

jede Umgebung jedes Punktes enthält eine kompakte Umgebung des Punktes

2. Satz (Exponentialgesetz)

X, Y, Z topologische Räume, Y lokal kompakt

Für eine beliebige Abb. $f: X \times Y \rightarrow Z$ gilt:

$$f \text{ stetig} \iff f^\# \text{ stetig}$$

Wir haben also eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}(X, \underline{\text{Top}}(Y, Z)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Top}(X \times Y, Z) \\ f^\# & \longleftarrow & f \\ g & \longmapsto & g^b \end{array}$$

$$((Z^Y)^+ \cong Z^{X \times Y})$$

3. Bemerkung*: Es gilt sogar: für lokal kompaktes Y ist $\underline{\text{Top}}(Y, -)$ rechtsadjungiert zu $- \times Y$.

Beweis:

Sei $g: X \rightarrow \text{Top}(Y, Z)$ stetig.

z.z.: $g^b: X \times Y \rightarrow Z$ ist stetig.

Sei dazu $O \subseteq Z$ offen, $(x, y) \in (g^b)^{-1}O$,

also $g(x)(y) \in O$.

v.z.z.: $\exists$ Umgebung von (x, y) in $(g^b)^{-1}O$.

Da $g(x)$ stetig, ist jedenfalls $\underset{Y}{g(x)^{-1}O} \subseteq Y$ offen.

Da Y lokal kompakt ist, können wir eine kompakte Umgebung L von y wählen, sodass

$$y \in L \subseteq g(x)^{-1}O,$$

also

$$g(x)(L) \subseteq O$$

bzw.

$$x \in g^{-1}M(L, O) =: U.$$

Also ist $(x, y) \in U \times L \subseteq (g^b)^{-1}(O).$

□

4. Korollar:

(a) Sind X und Y lokal kompakt, so ist die Kompositionsabbildung

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Top}}(X, Y) \times \underline{\text{Top}}(Y, Z) & \longrightarrow & \underline{\text{Top}}(X, Z) \\ (g, f) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

stetig.

(b) Ist X lokal kompakt, so ist die Auswertungsabb.

$$\begin{array}{ccc} \text{ev}: \underline{\text{Top}}(X, Y) \times X & \longrightarrow & Y \\ (f, x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

stetig. Insbesondere ist

$$\begin{array}{ccc} \text{ev}_x: \underline{\text{Top}}(X, Y) & \longrightarrow & Y \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

für jedes $x \in X$ stetig.

Beweis:

zu b: $\text{id}: \underline{\text{Top}}_f(X, Y) \xrightarrow{\quad} \underline{\text{Top}}_f(X, Y)$ ist stetig,

$$\text{ev} = \text{id}^b: \underline{\text{Top}}_f(X, Y) \times X \longrightarrow Y, \quad (f, x) \longmapsto (\text{id})(f)(x) = f(x)$$

also ist ev stetig. Auswertung an $x \in X$ ist die Komposition

$$\underline{\text{Top}}_f(X, Y) \xrightarrow{\quad} \underline{\text{Top}}_f(X, Y) \times X \xrightarrow{\text{ev}} Y$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{immer stetig}}$

zu a: Die Komposition ist adjungiert unter $(g^L \dashv g)$ zu

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Top}}(X, Y) \times \underline{\text{Top}}(Y, Z) \times X & \longrightarrow & Z \\ (g, f, x) & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

und diese lässt sich als folgende Komposition schreiben:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Top}}(X, Y) \times \underline{\text{Top}}(Y, Z) \times X & & (g, f, x) \\ \parallel \text{ (stetig)} & & \downarrow \\ \underline{\text{Top}}(Y, Z) \times \underline{\text{Top}}(X, Y) \times X & & (f, g, x) \\ \downarrow \text{ id} \times \text{ev (stetig nach b)} & & \downarrow \\ \underline{\text{Top}}(Y, Z) \times Y & & (f, g(x)) \\ \downarrow \text{ ev (stetig nach b)} & & \downarrow \\ Z & & f(g(x)) \quad \square \end{array}$$

Kleine Anwendung:

Sei $q: X \rightarrow X'$ eine Identifizierung

(d.h.: q surjektiv und X' trägt Quotiententopologie bzgl. q).

Ist auch

$q \times \text{id}: X \times Y \rightarrow X' \times Y$ eine Identifizierung?

5. Satz: Das Produkt einer Identifizierung mit einem lokal kompakten Raum ist wieder eine Identifizierung.

Beweis:

Wdh.: $q: X \rightarrow X'$ ist genau dann Identifizierung, wenn q folgende $\mathcal{U}$ besitzt:
für Abbildungen $X' \xrightarrow{t} T$ gilt:
 t stetig $\Leftrightarrow t \circ q$ stetig

Sei also $X' \times Y \xrightarrow{t} T$ gegeben. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} X' \times Y & \xrightarrow{t} & T & \text{stetig} \\ \uparrow \text{Exp.} & & & \\ X' & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Top}}(Y, T) & \text{stetig} \\ \uparrow & & & \\ X & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Top}}(Y, T) & \text{stetig (}\mathcal{U} \text{ von } q\text{)} \\ \uparrow \text{Exp.} & & & \\ X \times Y & \xrightarrow{\quad} & T & \text{stetig.} \\ t \circ (q \times \text{id}) & & & \end{array}$$

□