

3. Lokal kompakt erzeugte schwach-Hausdorff-Räume *

Für viele Zwecke ist das Exponentialgesetz aus §2 ausreichend. Insbesondere können wir eine Homotopie wohlweise als Abb.

$$X \times I \longrightarrow Y$$

oder

$$X \longrightarrow \underline{\text{Top}}(I, Y)$$

auffassend, denn $I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt Hausdorffsch, somit lokal kompakt.

Bequemer wäre trotzdem ein Exp-Gesetz ohne Voraussetzungen.

GESUCHT: Unterkategorie $\text{Top}' \subseteq \text{Top}$ mit:

- (a) Top' enthält viele Räume
- (b) Top' abgeschlossen unter allen üblichen Konstruktionen
- (c) Exponentialgesetz gilt in Top' ohne Voraussetzungen

Kandidaten

- $\text{Top}^1 = (\text{lokal kompakte Räume})$

a ✓ b ✗

z. B.: ∞ Produkte lokal kompakter Räume sind nicht lokal kompakt

[Blatt 1, Aufgabe 3 (g)/

Blatt 2, Aufgabe 2]

- ...
- ...
- ... } viele erfolglose Versuche

- $\text{Top}^1 = (\text{kompakt erzeugte Schwach-Hausdorff-Räume})$

a ✓ b ✓ c ✓ vgl. [May, § 5]

- $\text{Top}^1 = (\text{lokal kompakt erzeugte Schwach-Hausdorff-Räume})$

a ✓ b ✓ c ✓ vgl. [LS, § 4.5]

1 Def. Ein top. Raum X ist lokal kompakt erzeugt (lke), falls er folgende $\mathcal{U}$ besitzt:

Eine Abbildung $X \xrightarrow{t} T$ ist genau dann stetig, falls

$$K \xrightarrow{s} X \xrightarrow{t} T$$

stetig ist für alle lokal kompakten K und alle stetigen s .

(Äquivalent: [Blatt 2, Aufgabe 1 (a)])

$U \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow \exists U$ offen in K für jedes lokal kompakte K , jedes stetige $s: K \rightarrow X$)

2. Bsp.: Jeder lokal kompakte Raum ist lke.

Sei $KTop \subseteq Top$ die Kategorie der lke Räume und stetigen Abb.

3. Lemma: Die Inklusion

$$KTop \hookrightarrow Top$$

besitzt einen Rechtsadjungierten

$$KTop \xleftarrow{k} Top$$

mit $k \circ j = id$.

(D.h. insbesondere:

$$KTop(X, kY) \cong Top(jX, Y)$$

für lke X und beliebiges Y .)

Beweis: Definiere für top. Raum Y

$k(Y) :=$ Menge Y mit Topologie

$(U \subseteq Y \text{ offen} \Leftrightarrow \exists U \subseteq K \text{ offen für alle lokal komp. } K, \text{ alle stetigen } s: K \rightarrow Y)$

[...]

□

4. Def.: Das k -Produkt zweier lke Räume X_1, X_2 ist gegeben durch

$$X_1 \times_k X_2 := k(X_1 \times X_2).$$

(Nach RAKL ist das wirklich ein Produkt in $k\text{Top.}$)

5. Bem.: Sind X_1, X_2 lokal kompakt, so ist auch $X_1 \times X_2$ lokal kompakt (Übung). Insbesondere ist dann

$$X_1 \times_k X_2 = X_1 \times X_2.$$

6. Def.: Ein lke Raum X ist schwach hausdorffsch (sHd), falls die Diagonale $\Delta(X) \subseteq X \times_k X$
 $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$
abgeschlossen ist.

7. Bemerkung:

(a) Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn $\Delta(X) \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist.

(b) Für lke Räume X gilt:

hausdorffsch $\Rightarrow$ schwach hausdorffsch

(c) Für lokal kompaktes X gilt:

hausdorffsch $\Leftrightarrow$ schwach hausdorffsch

8. Def.: $\text{Top}^1 :=$ Kategorie der lke sHd-Räume und stetigen Abb.

(a) Top^1 enthält viele Räume:

- alle lokal kompakten Hausdorff-Räume (s.o.), insbesondere alle topologischen Mannigfaltigkeiten
- alle metrisierbaren Räume [...], insbesondere alle Unterräume von $\mathbb{R}^n$. [Laures & Szymik, Beispiel am Anfang von §4.5]

(b) Top^1 abgeschlossen unter Konstruktionen

§ Theorem: In Top^1 existieren alle Limiten und Kolimiten von kleinen Diagrammen (siehe [Laures Szymik, §4.5])



Im Allgemeinen unterscheiden sich die Limiten und Kolimiten in Top^1 von denen in Top . Immerhin gilt:

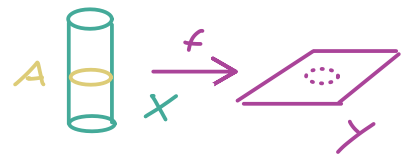
10 Lemma: Jeden Top -Limes bzw. Top -Kolimes von Räumen aus Top^1 der selbst wieder in Top^1 liegt, ist bereits der entsprechende Top^1 -Limes bzw. Top^1 -Kolimes. □

11 Satz:

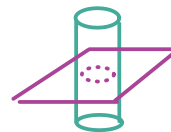
- (a) Jeder abgeschlossene oder offene Teilraum eines lke stHd-Raums ist wieder lke stHd.
- (b) Jedes Produkt eines lke Hd-Raums mit einem lokal kompakt Hd-Raum ist ein lke stHd-Raum.
- (c) Jeder Quotient eines lke Hd-Raums modulo einer abgeschlossenen Relation $R \subseteq X \times_{\text{Top}} X$ ist wieder ein lke stHd-Raum.
- (d) Jede Summe von lke stHd-Räumen ist ein lke stHd-Raum. □

12 Korollar:

- (a) Sind X, Y lke stHd-Räume,
 $A \subseteq X$ abgeschlossener Teilraum
 Dann sind auch



$X/A = X \sqcup_A *$ und allgemein $X \sqcup_A Y$
 für jede stetige Abb. $f: A \rightarrow Y$



lke stHd-Räume

- (b) Der gewöhnliche sequentielle Kolimes (Vereinigung)

$$\text{colim} (X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 \hookrightarrow X_4 \dots)$$

ist für jede Sequenz abgeschlossener
 Unterräume von lke stHd-Räumen wieder ein
 lke stHd-Raum. □

13 Beispiel:

Betrachte folgendes Pushout in Top :

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\mathbb{N}} S^0 & \xrightarrow{\text{abg.}} & \coprod_{\mathbb{N}} D^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & \bigvee_{\mathbb{N}} S^1 =: X
 \end{array}$$


X ist nicht lokal kompakt, denn der Mittelpunkt hat keine kompakte Umgebung.

(Angenommen, K ist eine solche Umgebung.

Dann schneidet K jede Schleife in mindestens einem Punkt $\neq$ Mittelpunkt. Diese Punkte bilden eine ∞ diskrete Teilmenge von K ($\nmid K$ kompakt.)

Korollar 12(a) sagt:

X ist immerhin ein lke sHd-Raum,

und somit nach Lemma 10 das Pushout

$$\frac{\coprod D^1}{\coprod S^0} \quad \underline{\underline{\text{in Top}}}.$$

(c) In Top' gilt starkes Exponentialgesetz

14 Theorem: Die Abbildungsmengen

$\text{Top}'(X, Y) := \text{Top}(X, Y)$ lassen sich damit mit einer Topologie versehen, dass wir lke sHd-Räume $\underline{\text{Top}}'(X, Y)$ erhalten, für die gilt:

(a) $\underline{\text{Top}}'(X, Y) = \underline{\text{Top}}(X, Y)$ für alle lokal kompakten Hd-Räume

(b) Für stetige Abb. $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ sind auch

$$f_*: \underline{\text{Top}}(X, Y_1) \xrightarrow{f \circ g} \underline{\text{Top}}(X, Y_2)$$

$$\text{und } f^*: \underline{\text{Top}}(Y_1, Z) \xleftarrow{g \circ f} \underline{\text{Top}}(Y_2, Z) \quad \text{stetig.}$$

(c) Für alle lke sHd-Räume X, Y, Z ist

$$\underline{\text{Top}}'(X, \underline{\text{Top}}'(Y, Z)) \xrightarrow{g \mapsto g^b} \underline{\text{Top}}'(X+Y, Z)$$

ein Homöomorphismus.

Beweis: siehe [Laures & Szymek, §4.5]. □

15 Notation: $Y^X := \underline{\text{Top}}'(X, Y)$

In dieser Notation besagt das Exponentialgesetz also:

$$(Z^Y)^X \cong Z^{X+Y}$$

16. Korollar:

Wir haben Funktoren $(-)^Y: \text{Top}^1 \longrightarrow \text{Top}^1$
und $Y^{(-)}: (\text{Top}^1)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Top}^1$.

Der Funktor $(-)^Y$ ist rechtsadjungiert zum Produkt-funktor $Y \times -$.

Der Funktor $Y^{(-)}: (\text{Top}^1)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Top}^1$ ist rechtsadjungiert zu sich selbst aufgefasst als Funktor $(\text{Top}^1)^{\text{op}} \longleftarrow \text{Top}^1$.

Beweis:

Def. der Funktoren "offensichtlich" nach Theorem 14b.

$$\begin{array}{ccc} (-)^Y: \text{Top}^1 \longrightarrow \text{Top}^1 & & Y^{(-)}: (\text{Top}^1)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Top}^1 \\ \begin{array}{c} X \\ f \downarrow \\ X' \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} X^Y \\ f_* \downarrow \\ (X')^Y \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ \begin{array}{c} X \\ f \uparrow \\ X' \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} Y^+ \\ f^* \downarrow \\ Y^{+'} \end{array} \end{array}$$

Erste Adjunktion folgt direkt aus Thm 14(c):

$$\text{Top}^1(X \times Y, Z) \stackrel{14(c)}{\cong} \text{Top}^1(X, Z^Y)$$

Zweite Adjunktion folgt:

$$\begin{aligned} (\text{Top}^1)^{\text{op}}(Y^+, Z) & \stackrel{||}{=} \text{Top}^1(Z, Y^+) \stackrel{14(c)}{\cong} \text{Top}^1(\underbrace{Z \times X}_Y, Y) \\ & \stackrel{14(c)}{\cong} \text{Top}^1(X \times Z, Y) \stackrel{14(c)}{\cong} \text{Top}^1(X, Y^Z) \end{aligned}$$

□

17. Korollar: In Top^1 ist das Produkt zweier Identifizierungen wieder eine Identifizierung.

Beweis: genau wie zu §2, Satz 5.

□

18. Definition: Die Homotopiekategorie HoTop

hat als Objekte topologische Räume
(also alle Objekte aus Top) und als
Morphismen Homotopieklassen:

$$\begin{aligned}[X, Y] &:= \{ \text{Homotopieklassen stetiger} \\ &\quad \text{Abb. } X \longrightarrow Y \} \\ &= \frac{\text{Top}(X, Y)}{\simeq}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{wobei } f \simeq g &: \Leftrightarrow \exists H: X \times I \longrightarrow Y \\ &\quad \text{mit } H(-, 0) = f \\ &\quad \text{und } H(-, 1) = g.\end{aligned}$$

Die gewöhnliche Komposition von Abbildungen
induziert eine Komposition von Homotopieklassen
(Ist $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$, so auch $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$
– siehe Einführung.)

Analog: Homotopiekategorie HoTop'

19. Korollar: Für jeden lke sHd-Raum Y induzieren
die Funktoren $- \times Y$, $(-)^Y$ und $Y^{(-)}$ aus
Korollar 16 Funktoren

$$- \times Y: \text{HoTop}' \longrightarrow \text{HoTop}'$$

$$(-)^Y: \text{HoTop}' \longrightarrow \text{HoTop}'$$

$$Y^{(-)}: (\text{HoTop}')^{\text{op}} \longrightarrow \text{HoTop}'$$

und wir haben Adjunktionen

$$\text{HoTop}' \begin{array}{c} \xleftarrow{- \times Y} \\ \xrightarrow{(-)^Y} \end{array} \text{HoTop}'$$

$$\text{und } (\text{HoTop}')^{\text{op}} \begin{array}{c} \xleftarrow{Y^{(-)}} \\ \xrightarrow{Y^{(-)}} \end{array} \text{HoTop}'$$

Beweis:

$- \times Y$ wohldef.: Sei $f \simeq g: X \rightarrow X'$.

$\exists H: X \times I \rightarrow X'$ Homotopie $f \rightsquigarrow g$.

$H \times Y: X \times I \times Y \rightarrow X' \times Y$
 $\parallel$
 $X \times Y \times I \xrightarrow{\quad} \text{ist Homotopie } f \times Y \rightsquigarrow g \times Y$

$(-)^Y$ wohldef.: Sei $f \simeq g: X \rightarrow X'$

$\exists H: X \times I \rightarrow X'$ Homotopie $f \rightsquigarrow g$

Also $H^\# : X \rightarrow (X')^I$

Dann ist $(H^\#)^Y : X^Y \rightarrow ((X')^I)^Y$
 $\parallel$ Theorem 14
 $(X')^{Y \times I}$
 $\parallel$ Theorem 14
 $((X')^Y)^I$

adjungiert zu

$((H^\#)^Y)^\flat : X^Y \times I \rightarrow (X')^Y$,

und das ist eine Homotopie von f^Y nach g^Y [...].

$Y^{(-)}$ wohldef.: ganz ähnlich

Erste Adjunktion:

zu prüfen ist: (a) $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow f_0^\# = f_1^\#$

(b) $g_0 \simeq g_1 \Rightarrow g_0^\flat = g_1^\flat$

zu a: Ist $H: X \times Y \times I \rightarrow Z$ Homotopie $f_0 \rightsquigarrow f_1$,
 $\parallel$
 $X \times I \times Y \xrightarrow{\quad \tilde{H} \quad}$

so ist $\tilde{H}^\# : X \times I \rightarrow Z^Y$ Homotopie $f_0^\# \rightsquigarrow f_1^\#$.

zu b: analog.

Zweite Adjunktion: folgt (vgl. Beweis zu Korollar 76)

□

Ab jetzt:

$$\text{Top} := \text{Top}'$$

$$\text{top. Raum} := \text{lke s Hd-Raum}$$

$$\text{HoTop} := \text{HoTop}'$$

$$\text{Abbildung} := \text{stetige Abb.}$$

