

Ab jetzt:

$$\text{Top} := \text{Top}'$$

$$\text{top. Raum} := \text{lke s Hd-Raum}$$

$$\text{HoTop} := \text{HoTop}'$$

$$\text{Abbildung} := \text{stetige Abb.}$$

4: Kofaserungen

Ziel: Abbildungen in Top in „einfachere“ Bestandteile zerlegen

Schwache Analogie: Einfache $\mathbb{R}$ -lineare Abb. sind Monomorphismen, Epimorphismen und Isomorphismen, und jede $\mathbb{R}$ -lineare Abb. lässt sich faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \text{Epi} \searrow & & \nearrow \text{Mono} \\ & V/\ker f \cong \text{im}(f) & \end{array}$$

Auch in Top lässt sich jede Abbildung in eine Surjektion gefolgt von einer Inklusion zerlegen, aber diese Zerlegung ist für die Homotopietheorie irrelevant. Stattdessen studieren wir:

- Kofaserungen $(\twoheadrightarrow)$
- Faserungen $(\longrightarrow)$
- (vorläufig) Homotopieäquivalenzen $(\xrightarrow{\sim})$

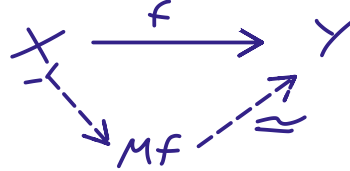
1. Def.: Eine (Hurewicz-) Kofaserung ist eine Abbildung $A \xrightarrow{i} X$, die bezüglich jeder Abb. $X \xrightarrow{f} Y$ die Homotopieerweiterungseigenschaft (HE) ($\rightarrow$ Def. 5) besitzt.

2. Satz (Kofaserkriterium):

Eine Abb. ist genau dann eine Kofaserung, wenn sie ein Umgebungsdeformationsretrakt ($\rightarrow$ Def. 8) ist.

3. Satz (Kofaserfaktorisierung):

Jede Abb. lässt sich faktorisieren in eine Kofaserung gefolgt von einer Homotopieäquivalenz.

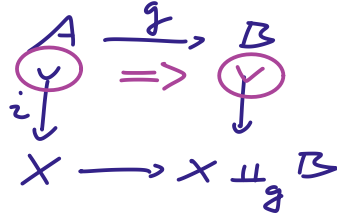


4. Satz (Konstruktionen mit Kofaserungen)

(a) Kompositionen von Kofaserungen sind Kofaserungen.

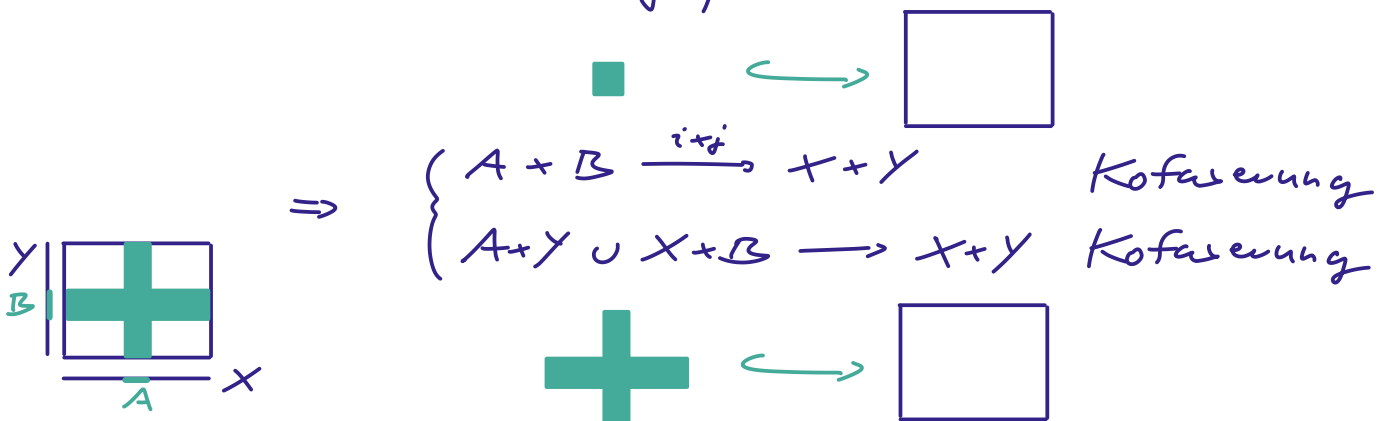
(b) Kofaserungen sind stabil unter Pushouts:

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{i} X \text{ Kofaserung} \\ A \xrightarrow{g} B \text{ beliebig} \end{array} \right\} \Rightarrow B \rightarrow X \amalg_g B \text{ Kofaserung}$$

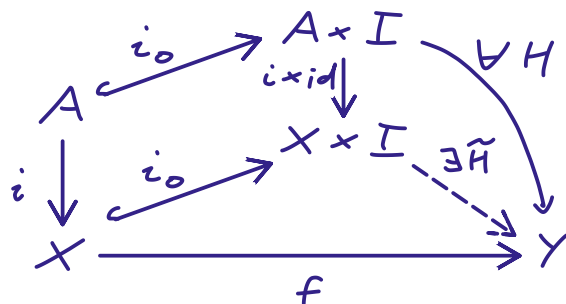


(c) Produkte von Kofaserungen sind Kofaserungen in folgendem Sinne:

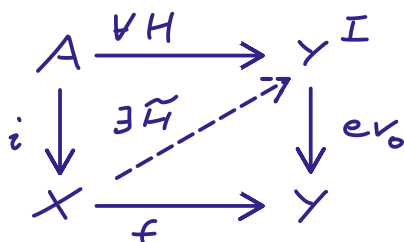
$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{i} X \text{ Kofaserung} \\ B \xrightarrow{j} Y \text{ Kofaserung} \end{array} \right\}$$



5. Def: Eine Abbildung $i: A \rightarrow X$ hat die Homotopieerweiterungseigenschaft (HE) bezüglich $f: X \rightarrow Y$, falls sich jede Homotopie auf A mit Anfang $f \circ i$ zu einer Homotopie auf X mit Anfang f fortsetzen lässt.

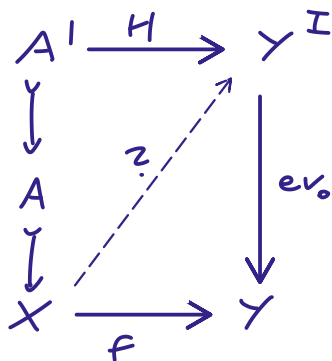


Äquivalent:

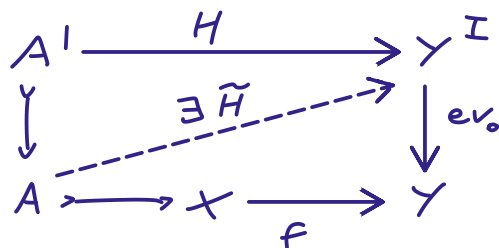


Beweis zu Satz 4 (a) & (b):

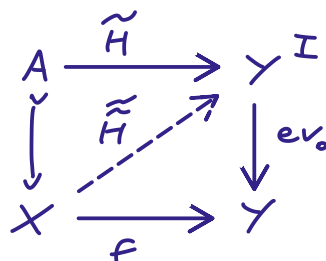
a:

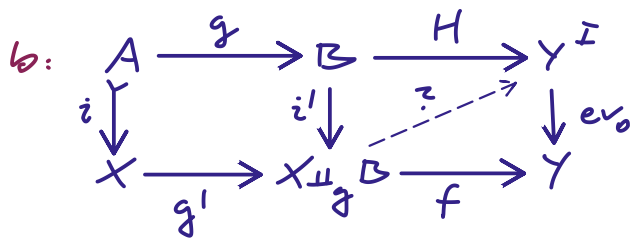


Schritt 1:

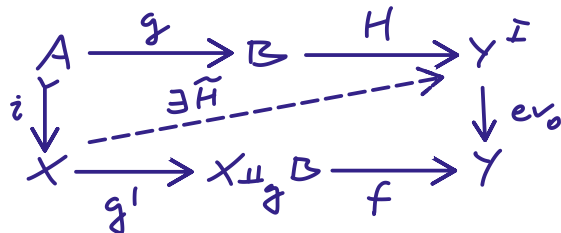


Schritt 2:

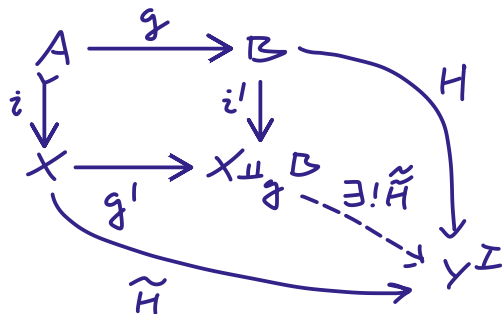




Schritt 1:



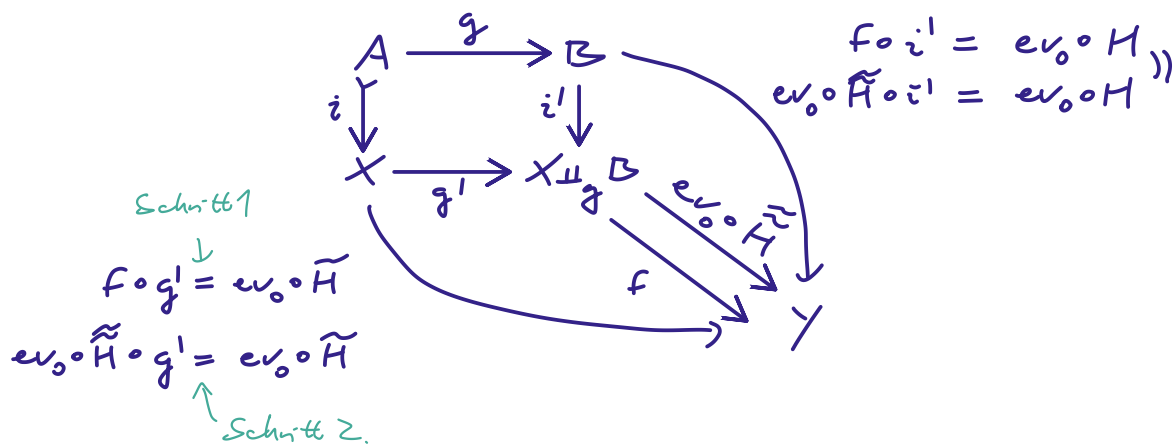
Schritt 2:



$$H \circ g \stackrel{z}{=} \tilde{H} \circ i$$

Prüfe ① $\tilde{H} \circ i' = H$ ✓

② $ev_0 \circ \tilde{H} = f$:



Es folgt $f = ev_0 \circ \tilde{H}$ wegen $\mathcal{U}$ des Pushouts.

□

Umgebungsdeformationsretrakte

Wdh: Eine Abbildung $A \xrightarrow{i} X$ ist ein **Retrakt**, falls eine Abbildung $A \xleftarrow{r} X$ existiert mit $r \circ i = \text{id}_A$.
Ich nenne r dann **Retraktion**.

6. Lemma: Jeder Retrakt [von l.k.c. sHd-Räumen] ist eine Einbettung eines abgeschlossenen Unterraums.

Beweis:

$r \circ i = \text{id}_A$, also ist i injektiv.

$$\begin{aligned} \text{Ferner } i(A) &= \{ x \in X \mid i \circ r(x) = \text{id}_X(x) \} \\ &= \text{equalizer} \left(X \begin{array}{c} \xrightarrow{i \circ r} \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} X \right) \end{aligned}$$

ist abgeschlossen in X (da X sHd, siehe Übung).
[Blatt 2, Aufgabe 4 (a)]

Topologie auf A ist Unterraumtopologie:

- Ist $U \subseteq A$ offen, so ist $U = i^{-1} \underbrace{r^{-1}(U)}_{\text{offen in } X}$.
- Ist $U = i^{-1}(V)$ für eine offene Menge $V \subseteq X$, so ist U offen in A , da i stetig. $\square$

7. Def. Ein abgeschlossener Unterraum $A \subseteq X$ ist ein **Umgebungsdeformationsretrakt (UDR)**, falls eine offene Umgebung U von A in X existiert und eine Abb.

$$H: X \times I \longrightarrow X$$

mit

$$H_0 (= H(-, 0)) = \text{id}_X$$

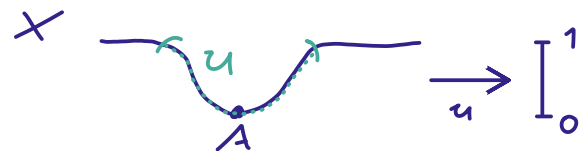
$$H_t|_A = \text{id}_A$$

$$H_1(U) \subseteq A$$

Ferner muss eine Abbildung $u: X \longrightarrow I$ existieren

mit $A = u^{-1}(0)$

und $U = u^{-1}(0, 1)$



Ein UDR ist ein **Deformationsretrakt (DR)**, falls wir $U = X$ wählen können.

8. Bemerkungen:

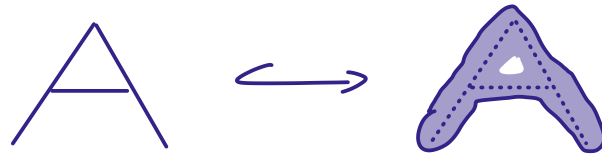
(a) DR $\Rightarrow$ Retrakt & Homotopieäquivalenz

(Sei $H_1^! : X \rightarrow A$ Faktorisierung von H_1 durch A .

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{H_1^!} A, \quad X \xrightarrow{H_1^!} A \xrightarrow{i} X \\ \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{id_A} \hspace{1.5cm} \text{ist homotop zu } H_0 = id. \end{array}$$

Also ist $H_1^!$ Retraktion für i und Homotopie-inverses.)

(b) viele Bilder von DR in [Hatcher, S. 1 & 2].



(c) DR ~~$\Leftarrow$~~ Retrakt

z.B. $\bullet \leftrightarrow \bigcirc$ Retrakt, aber nicht DR.

9. Satz (vgl. Satz 4(c))

$$\left. \begin{array}{l} A \hookrightarrow X \quad \text{UDR} \\ B \hookrightarrow Y \quad \text{UDR} \end{array} \right\} \Rightarrow A \times Y \cup X \times B \hookrightarrow X \times Y \quad \text{UDR}$$



Ist einer der gegebenen UDR links ein DR,
so ist auch der UDR rechts ein DR.

Beweis:

Sei u, H für $A \hookrightarrow X$ wie in Def. 7 gegeben.

Sei v, J für $B \hookrightarrow Y$ wie in Def. 7 gegeben.

Def. w, K für $A \times Y \cup X \times B \hookrightarrow X \times Y$:

$$w: X \times Y \longrightarrow I$$

$$(x, y) \mapsto \min(u_x, v_y)$$

$$K: X \times Y \times I \longrightarrow X \times Y$$

$$(x, y, t) \mapsto \begin{cases} (H_t(x), J_t(y)) & \text{falls } u_x = v_y \\ (H_{t \cdot \frac{v_y}{u_x}}(x), J_t(y)) & \text{falls } 0 \neq u_x \geq v_y \\ (H_t(x), J_{t \cdot \frac{u_x}{v_y}}(y)) & \text{falls } u_x \leq v_y \neq 0 \end{cases}$$

Prüfe:

- w stetig (da $\min: I \times I \rightarrow I$ stetig)
- $w'(0) = A \times Y \cup X \times B$
- K wohldef. ✓
- K stetig — s. u.
- $K_0 = \text{id}$ ✓

$$\cdot K_t|_{A \times Y \cup X \times B} = \text{id}$$

Für $(a, y) \in A \times Y$ mit $y \notin B$ ist $0 = ux < vy \neq 0$,

$$\text{also } K_t(a, y) = (H_t(a), j_0(y)) \\ = (a, y) \quad \checkmark$$

Andere Fälle analog. [...]

$$\cdot K_t(x, y) \in A \times Y \cup X \times B \quad \text{für } (x, y) \in \bar{w}^{-1}[0, 1).$$

Falls $ux \geq vy$, dann $y \in \bar{v}'[0, 1)$; somit

$$K_t(x, y) = \left(H_{\frac{vy}{ux}}(x), \underbrace{j_1(y)}_{\in B} \right) \in A \times Y \cup X \times B.$$

Andere Fälle analog.

K stetig:

Stetigkeit auf offener Menge $X \times Y \times I \setminus A \times B \times I$
klar, denn hier gibt es nur zwei Definitionszweige
($ux \geq vy$ & $ux < vy$), beide Bereiche abgeschlossen,
Übereinstimmung auf Schnitt.

Stetigkeit in $(a, b, t) \in A \times B \times I$:

Sei $U_a \times U_b \subseteq X \times Y$ offene Umgebung von

$$K(a, b, t) = (a, b).$$

z.z.: $K^{-1}(U_a \times U_b)$ ist Umgebung von (a, b, t) .

Da $a \in A$, ist $H(\{a\} \times I) = \{a\}$, also

$$\underbrace{\{a\} \times I}_{\text{Kompaktes Rechteck}} \subseteq \bar{H}^{-1}(a) \subseteq \underbrace{H^{-1}(U_a)}_{\text{offen}}$$

Nach dem Rechtecklemma ([Blatt 1, Aufgabe 2]) existiert offene
Umgebung V_a von a in X mit

$$V_a \times I \subseteq H^{-1}(U_a)$$

Genauso $\exists$ offene Umgebung V_b von b in Y
mit $V_b + I \subseteq j^{-1}(U_b)$.

Nun ist $V_a \times V_b + I$ Umgebung von (a, b, t)
mit $K(V_a \times V_b + I) \subseteq H(V_a + I) \times j(V_b + I)$
 $\subseteq U_a \times U_b$,

also

$(a, b, t) \in V_a \times V_b + I \subseteq K^{-1}(U_a \times U_b)$. $\square$

Beweis von Satz 4(c) modulo Kofaserkriterium 2:

erste Aussage ($A \times B \rightarrow X \times Y$ Kofaserung) folgt
aus Def. von Kofaserung via HE und

Exponentialgesetz — siehe Übung. [Blatt 3]

zweite Aussage ist genau Satz 9 oben. $\square$

Abbildungszylinder

10. Def.: Der Abbildungszylinder Mf (mapping cylinder) einer Abb. $f: X \rightarrow Y$ ist

$$Mf := Y \amalg_{i_0} X \times I$$

Diagramm:

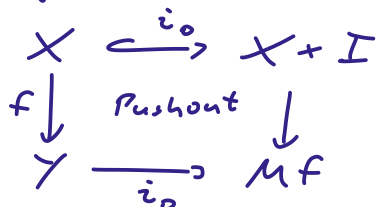
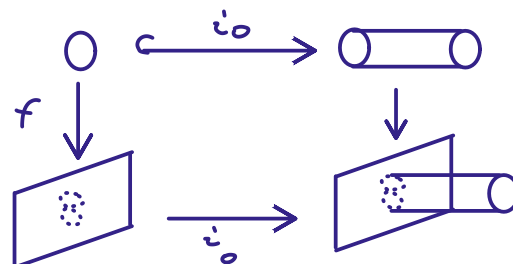
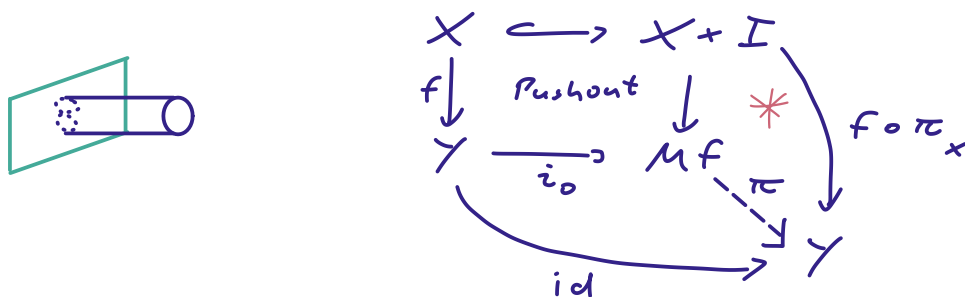


Bild:



11. Bemerkung (Übung [Blatt 3])

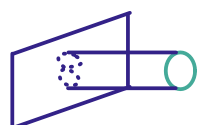
(a) Die kanonische Inklusion $i_0: Y \rightarrow Mf$ ist ein DR. Eine Retraktion ist gegeben durch:



Insbesondere ist $i_0: Y \xrightarrow{\sim} Mf$ Homotopieäq. mit Homotopieinversen π .

(b) Die kanonische Inklusion $X \xhookrightarrow{i_1} Mf$

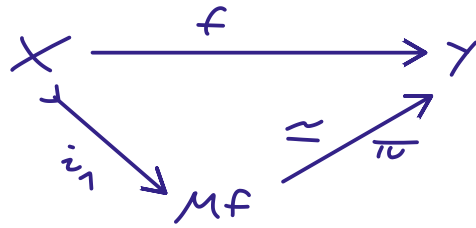
(def. als Komposition



$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow i_1 \\ X \times I \\ \downarrow \\ Mf \end{array}$$

ist ein UDR.

Beweis des Faktorisierungssatzes 3 modulo
Kofaserkriterium 2:



$$\begin{aligned}
 x \mapsto (x, 1) \mapsto \pi(x, 1) &\stackrel{*}{=} f \circ \pi_x(x, 1) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

12 Satz: Folgendes ist äquivalent:

① $A \xrightarrow{i} X$ UDR

② $M_i \xrightarrow{(i \times id, i_0)} X \times I$ DR

③ $M_i \xrightarrow{(i \times id, i_0)} X \times I$ Retrakt

④ $A \xrightarrow{i} X$ hat HE bzgl. $X \xrightarrow{i_0} M_i$

⑤ $A \xrightarrow{i} X$ Kofaserung



Das beweist insbesondere das Kofaserkriterium 2.

Beweis:

(1 $\Rightarrow$ 2) Folgt aus Produktsatz 5:

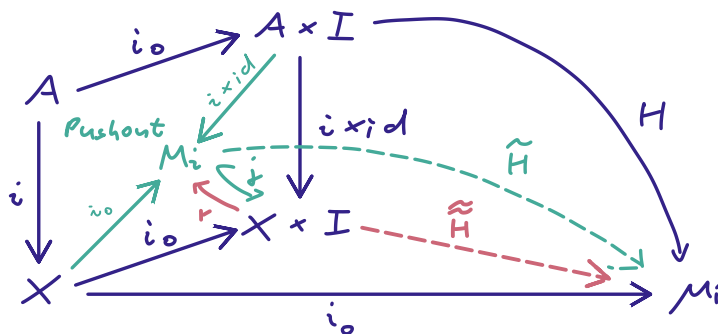
$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{i} X \text{ UDR} \\ \{0\} \rightarrow I \text{ DR} \end{array} \right\} \underbrace{A \times I \cup X \times \{0\}}_{M_i} \rightarrow X \times I \text{ DR}$$

(2 $\Rightarrow$ 3) ✓

(3 $\Rightarrow$ 4) Sei $j := (i \times id, i_0): M_i \hookrightarrow X \times I$ aus ②.

Wähle Retraktion $M_i \xleftarrow{r} X \times I$, also $r \circ j = id$.

Schritt 1
Schritt 2



Nach $\sqsubseteq$ des Pushouts $M_i \exists \tilde{H}$ mit $\tilde{H} \circ (i \times id) = H$,

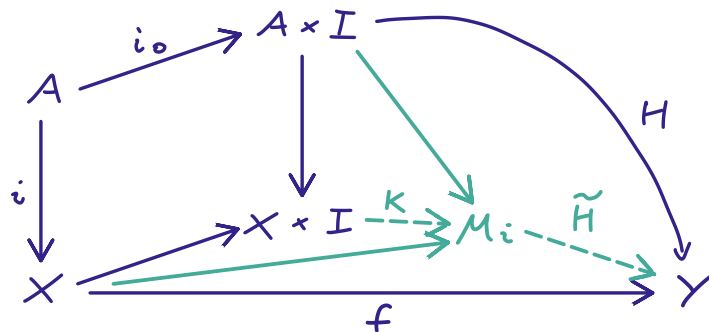
$$\tilde{H} \circ i_0 = i_0.$$

Definiere $\tilde{\tilde{H}} := \tilde{H} \circ r$.

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{H}} \circ (i \times id) &= \tilde{\tilde{H}} \circ r \circ (i \times id) = \tilde{\tilde{H}} \circ r \circ j \circ \underbrace{(i \times id)}_{id} \\ &= \tilde{\tilde{H}} \circ (i \times id) = H \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{H}} \circ i_0 = \tilde{\tilde{H}} \circ \underbrace{r \circ j}_{id} \circ i_0 = \tilde{\tilde{H}} \circ i_0 = i_0 \quad \checkmark$$

(4 $\Rightarrow$ 5)



$\tilde{H}$ existiert nach $\exists$ des Pushouts M_i .

K existiert nach Annahme (4).

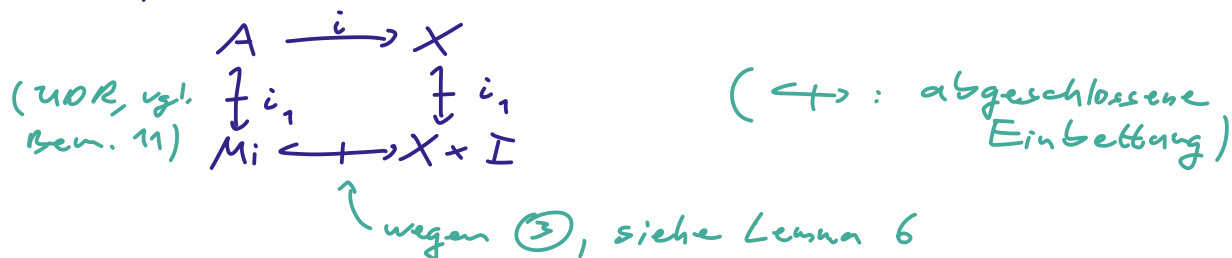
(5 $\Rightarrow$ 4) ✓

(4 $\Rightarrow$ 3) sehr ähnlich zu (3 $\Rightarrow$ 4) und (4 $\Rightarrow$ 5).

(3 $\Rightarrow$ 1)

$A \xrightarrow{i} X$ ist abgeschlossene Einbettung:

Das folgende Quadrat kommutiert:



Also ist $i_1 \circ i$ eine abgeschlossene Einbettung, und da $i_1: \begin{smallmatrix} X \\ \downarrow \\ X \times I \end{smallmatrix}$ abgeschl. Einbettung ist, ist auch i eine abgeschl. Einbettung.

Wir können also wieder $A \subseteq X$ und

$M_i = A \times I \cup X \times \{0\}$ annehmen.

Laut (3) existiert zu $j := (i \times \text{id}, i_0): M_i \hookrightarrow X \times I$

Retraktion $M_i \xleftarrow{r} X \times I$,

also $r \circ j = \text{id}$.

Def.: $H: X \times I \longrightarrow X$

$$(x, t) \mapsto \pi_X r(x, t)$$

↗ Projektion auf X -Koordinate

$$\mathcal{U} := \{x \in X \mid \pi_I r(x, 1) > 0\}$$

↗ Projektion auf I -Koordinate

Prüfe:

• $A \subseteq \mathcal{U}$: Für $a \in A$ ist $(a, 1) \in \mathcal{M}_i$ und

$$r(a, 1) = r_j(a, 1) = (a, 1), \text{ also}$$

$$\pi_I r(a, 1) = 1 > 0.$$

• $H_0 = \text{id}$ Für alle $x \in X$ ist $(x, 0) \in \mathcal{M}_i$, daher

$$r(x, 0) = (x, 0), \text{ also}$$

$$\pi_X r(x, 0) = x.$$

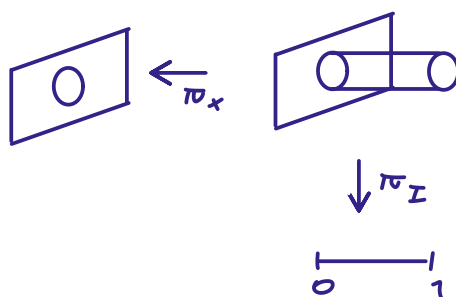
• $H_t(a) = a$ für alle t , für alle $a \in A$:

— analog, denn $(a, t) \in \mathcal{M}_i$.

• $H_1(u) \in A$ für alle $u \in \mathcal{U}$:

$$\text{Aus } \pi_I r(u, 1) > 0$$

$$\text{folgt } \pi_X r(u, 1) \in A.$$



Definiere $\pi: X \longrightarrow I$

$$x \mapsto \max \{ t - \pi_I r(x, t) \mid t \in I \}$$

Prüfe:

- π wohldef. [...] π_I
- π stetig (benutzt: KO-Topologie auf I^I
ist induziert von Supremumsnorm §1)
[...]
- $\tilde{\pi}'(0) = A$ [...]
- $\tilde{\pi}'(0,1) = \mathcal{U}$ [...] □