

Anhang I: Homotopieäquivalenzen unter Kofaserungen

A Raum

$A \downarrow \text{Top}$: Objekte: (X, i) mit

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow i \\ X \end{array}$$

"Räume unter A "

Morphismen:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$$\begin{aligned} (A \downarrow \text{Top})((X, i), (Y, j)) \\ = \{ f \in \text{Top}(X, Y) \mid f \circ i = j \} \end{aligned}$$

13. Def.: Seien (X, i) und (Y, j) Räume unter A .

Eine Homotopie unter A rel A ist eine Homotopie $X \times I \longrightarrow Y$, sodass H_t für jeden Zeitpunkt t eine Abb. unter A ist.

Zwei Abb. unter A sind homotop rel A , wenn

Eine Homotopieäquivalenz rel A ist eine Abb. $f: (X, i) \longrightarrow (Y, j)$ unter A , für die eine Abb.

$(X, i) \longleftarrow (Y, j): g$ unter A existiert und Homotopien

$$f \circ g \rightsquigarrow \text{id}_Y \text{ rel } A$$

und $g \circ f \rightsquigarrow \text{id}_X \text{ rel } A.$

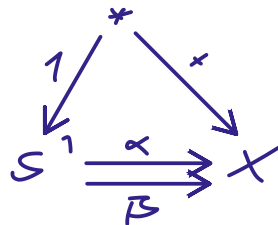
14. Beispiele:

$$\emptyset \downarrow \text{Top} = \text{Top}$$

$*$ $\downarrow$ Top $=: \text{Top}_*$ — punktierte topologische Räume

Homotopie rel $*$ wird z.B. für Schleifen

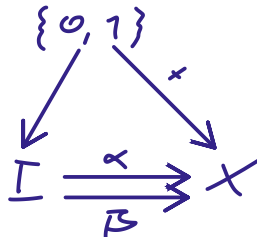
benutzt:



$$\{0,1\} \downarrow \text{Top}$$

Homotopie rel $\{0,1\}$ wird z.B. für Wege

benutzt:



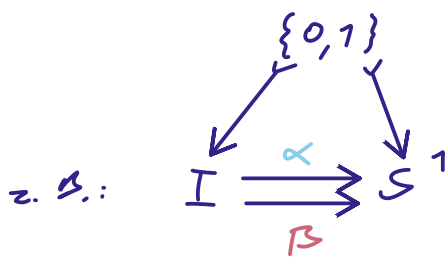
15. Satz: Seien $A \xrightarrow{i} X$ und $A \xrightarrow{j} Y$ Kofaserungen.
Dann ist jede Abb.

$$f: (X, i) \longrightarrow (Y, j) \text{ unter } A,$$

die eine gewöhnliche Homotopieäquivalenz ist,
eine Homotopieäquivalenz rel A .

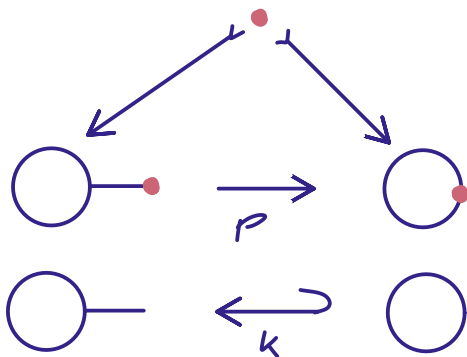


Das heißt **nicht**, dass beliebige
homotope Abb. auch homotop rel A sind.



sind homotop,
aber nicht homotop
rel $\{0, 1\}$.

z. B.:



p ist gewöhnliche
Homotopieäquivalenz
mit Homotopieinversen k .
 p ist auch pushout-Abb.,
aber k nicht.

Satz sagt: $\exists$ alternatives Homotopieinverses k'
mit $k' \circ p \simeq id$ rel $\bullet$
und $p \circ k' \simeq id$ rel $\bullet$.

Hilfslemma 1:

Sei $A \xrightarrow{i} X$ eine Kofaserung. Zu jedem

$f: (X, i) \longrightarrow (X, i)$ mit $f \simeq id$ in Top

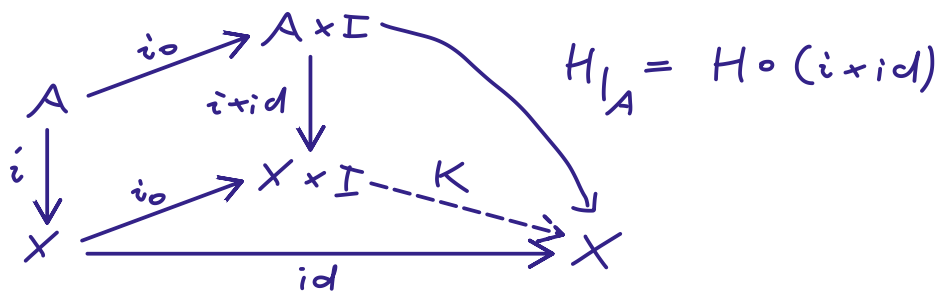
$\exists k: (X, i) \longrightarrow (X, i)$ mit $k \circ f \simeq id$ rel A .

Beweis:

Konstruktion von k :

Sei $H: X \times I \longrightarrow X$ Homotopie $f \rightsquigarrow id$.

Wende HE von i an:

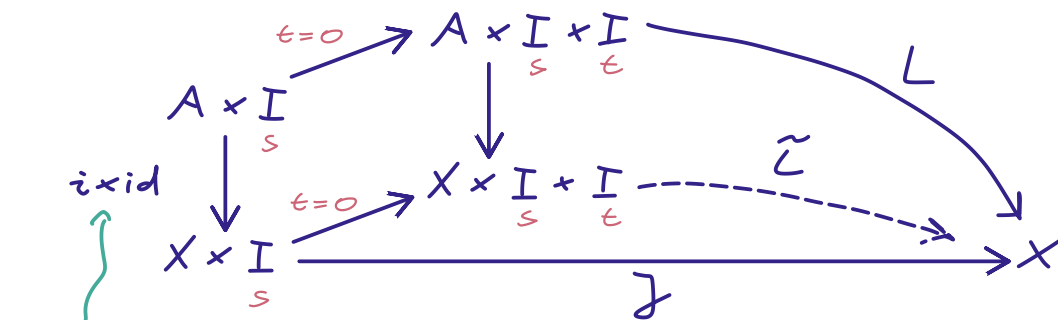


Wähle $k := K_1$.

Es ist $K \circ i = K_1 \circ i = \overset{id}{H_1} \circ i = i$, also ist

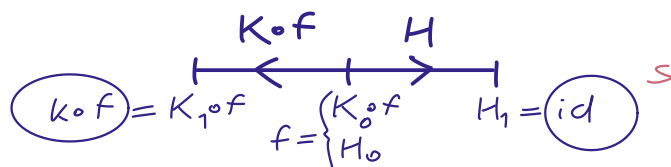
k wieder eine Abb. unter A .

Konstruktion einer Homotopie $W: k \circ f \rightsquigarrow id$ rel A :

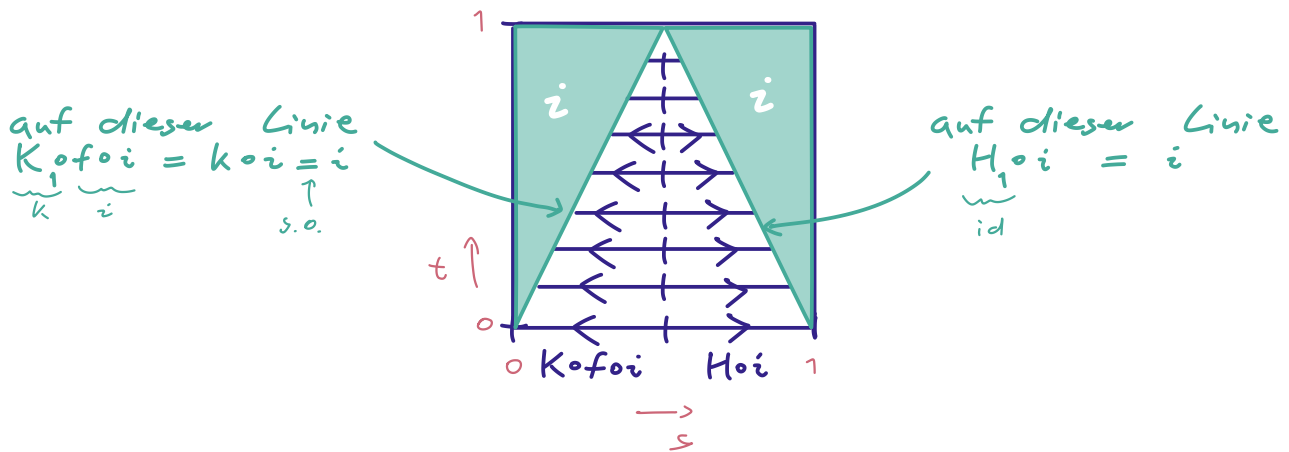


Wieder eine Kofaserung nach Satz 4(c)

Def. von J (als Abb. $I \longrightarrow X^+$):



Def. von L (als Abb. $I \times I \rightarrow X^A$):



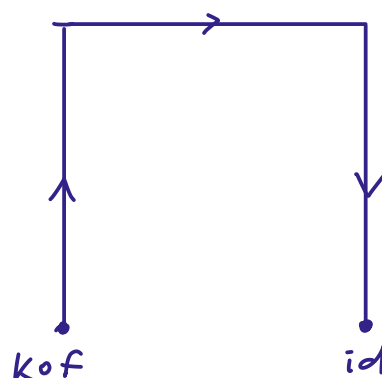
Nach HE $\exists \tilde{L}: I \times I \rightarrow X^+$ mit
 $(s, t) \mapsto L_{s,t}$

$$\tilde{L}_{s,t} \circ i = L_{s,t}$$

und

$$\tilde{L}_{s,0} = j_s.$$

Schränke $\tilde{L}$ wie folgt zu einem Weg $W: I \rightarrow X^+$
 $r \mapsto W_r$
 ein:



$$\begin{aligned} \text{Dann ist } W_0 &= \tilde{L}_{0,0} = j_0 = \text{kof}, \\ W_1 &= \tilde{L}_{1,0} = j_1 = \text{id}, \end{aligned}$$

und für alle $r \in I$:

$$\begin{aligned} W_r \circ i &= \tilde{L}_{s,t} \circ i \\ &= L_{s,t} \\ &= i. \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} W_r \circ i &= \tilde{L}_{s,t} \circ i \\ &= L_{s,t} \\ &= i. \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{für gewisses} \\ (s,t) \in \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \text{---} \end{array}$$



Hilfslemma 2:

Seien $A \xrightarrow{i} X$ und $A \xrightarrow{j} Y$ Kofaserungen,

$f: (X, i) \longrightarrow (Y, j)$ und $X \longleftarrow Y: g$

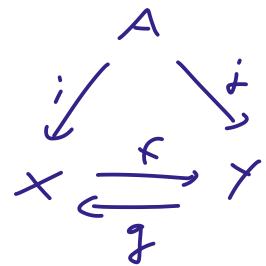
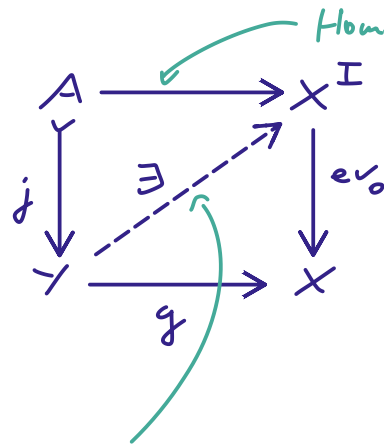
mit $g \circ f \simeq \text{id}$ in Top .

Dann existiert $(X, i) \longleftarrow (Y, j): \tilde{g}$

mit $\tilde{g} \circ f \simeq \text{id}$ rel A .

Beweis:

Schritt 1:



$g_1 :=$ Ende dieser Homotopie erfüllt $g_1 \circ j = i$.

Also $(X, i) \longleftarrow_{g_1} (Y, j)$ mit $g_1 \circ f \simeq \text{id}$ in Top .

Schritt 2:

Wende Hilfslemma 1 an auf

$g_1 \circ f: (X, i) \longrightarrow (X, i)$.

Erhalte $k: (X, i) \longrightarrow (X, i)$ mit $k \circ g_1 \circ f \simeq \text{id}$ rel A .

Wähle also $\tilde{g} := k \circ g_1$. $\triangle$

Beweis von Satz 15:

Sei nun $f: (X, i) \rightarrow (Y, j)$ gewöhnliche HA' .

Nach Hilfslemma 2 existiert

$$(X, i) \leftarrow (Y, j) : g$$

mit $g \circ f \simeq id$ rel A .

Da g Homotopierückverses zu f , ist auch g eine gewöhnliche HA' . Nach Hilfslemma 2 (angewendet auf " f " := g) existiert

$$h: (X, i) \rightarrow (Y, j)$$

mit $h \circ g \simeq id$ rel A .

Also ist g $H\bar{A}$ rel A

(üblicher Trick: $h \simeq_A h \circ g \circ f \simeq_A f$),

also ist f $H\bar{A}$ rel A

(üblicher Trick: $f \circ g \simeq_A h \circ g \simeq_A id$) .

□

Anhang II: Homotopie von Paaren

Ein Paar (X, A) ist ein Raum X mit einem Unterraum A . Eine Abb. von Paaren

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

ist eine Abb. $f: X \longrightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$.

16. Def.: Eine Homotopie von Paaren von (X, A) nach (Y, B) ist eine Homotopie

$$H: I \times X \longrightarrow Y,$$

die für jedes $t \in I$ eine Abb. von Paaren

$$H_t: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

definiert.

Zwei Abb. von Paaren sind homotop, wenn ...

Eine Homotopieäquivalenz von Paaren ist...

17. Satz: Seien die Inklusionen $i: A \longrightarrow X$
und $j: B \longrightarrow Y$

Kofaserungen, und sei

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

eine Abb. von Paaren derart, dass

$$f: X \longrightarrow Y$$

und $f|_A: A \longrightarrow B$

gewöhnliche Homotopieäquivalenzen sind.

Dann ist f bereits eine

Homotopieäquivalenz von Paaren.



Satz 15 ist **nicht** der Spezialfall

$B = A$, $f|_A = \text{id}$ von Satz 17.

(Satz 17 liefert z.B. kein Homotopieinverses g mit $g|_A = \text{id}$, sondern nur mit $g(A) \simeq A$.)

Beweis zu Satz 17 „ähnlich“ wie Beweis von
Satz 15.