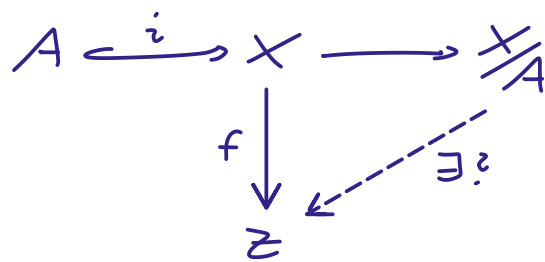


6. Kofaser- und Fasersequenz



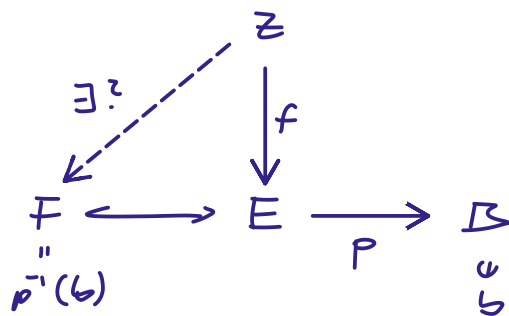
in Top : f faktorisiert durch X/A

$\Leftrightarrow f \circ i$ konstant

in HoTop : f faktorisiert durch X/A

$\Leftrightarrow f \circ i \simeq \text{konstant}$

? Ja, falls i
Kofaserung



in Top : f faktorisiert durch $F = p^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow p \circ f$ konstant $\hookrightarrow$

in HoTop : ? Entsprechende Aussage, falls
 p Faserung

Aber: Wir müssen mit
punktuierten
Räumen arbeiten.

Punktierbe Räumen

Erinnerung: $\text{Top.} = * \downarrow \text{Top}$

Objekte: (X, x) mit $x \in X$

Morphismen: $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y) \equiv X \xrightarrow{f} Y$
mit $f(x) = y$



Basispunkte fehlen oft in Notation.

	Top	Top.
Summe	$X \sqcup Y$	$(X, x) \vee (Y, y) = (X \sqcup Y, *)$
Produkt	$X \times Y$	$(X, x) \times (Y, y) = (X \times Y, (x, y))$
Abb.-Raum	X^Y	$(X, x)^{(Y, y)} = \text{Unterraum der punktierten Abb. in } X^Y$ Basispunkt: konstante Abb.

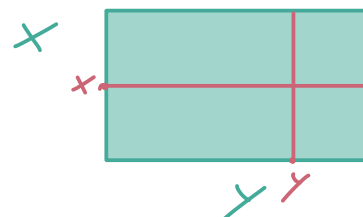
Links adj.
zu $(-)^Y$

$- \times Y$

$- \wedge (Y, y)$

$$(X, x) \wedge (Y, y) = \left(\frac{X \times Y}{X \vee Y}, (x, y) \right)$$

"smash-Produkt"



Levy
||
ein
Punkt

Exponential-
gesetz

$$\mathbb{Z}^{Y \times X} \cong (\mathbb{Z}^Y)^X$$

$$\mathbb{Z}^{Y \wedge X} \cong (\mathbb{Z}^Y)^X$$

1. Notiz: Für jeden Raum X und jeden punktierten Raum (Y, y) haben wir eine natürliche Bijektion

$$\text{Top}(X, Y) \cong \text{Top}_*(X_+, (Y, y)),$$

wobei $X_+ := (X \amalg *, *)$.

Wir haben also eine Adjunktion

$$\text{Top} \begin{array}{c} \xrightarrow{(\)_+} \\ \xleftarrow{\text{Vergiss}} \end{array} \text{Top}_*.$$

2. Def.: Eine **punktierte Homotopie** ist eine Homotopie unter $*$ (Def. 4.13), oder, äquivalent, eine punktierte Abb.

$$(X, x) \wedge I_+ \longrightarrow (Y, y)$$

Oder, äquivalent:

$$I_+ \longrightarrow (Y, y)^{(X, x)} \quad \text{in } \text{Top}_*.$$

Oder, äquivalent:

$$I \longrightarrow (Y, y)^{(X, x)} \quad \text{in } \text{Top}$$

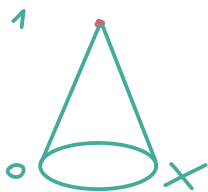
	Top	Top_*
Homotopie-kategorie	HoTop	HoTop_*
Menge der Homotopie-klassen	$[X, Y] := \text{HoTop}(X, Y) = \pi_0(Y^X)$	$[(X, x), (Y, y)] := \text{HoTop}_*((X, x), (Y, y)) = \pi_0((Y, y)^{(X, x)})$

Top

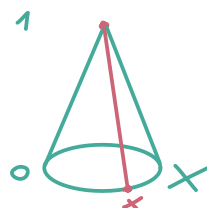
Top.

Kegel
(cone)

$$CX := \frac{X \times I}{X \times 1}$$



$$C_*(X, x) := (X, x) \wedge (I, 1)$$



||
ein Punkt

Einhängung
(suspension)

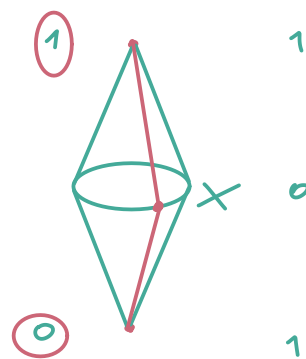
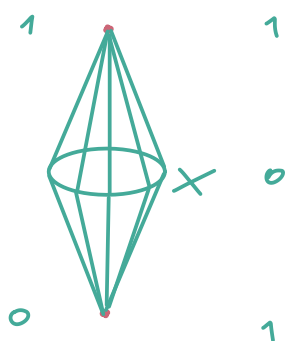
$$\Sigma X := \frac{X \times I}{X \times 0 \cup X \times 1}$$

$$= \text{pushout} \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & CX \\ \downarrow & & \downarrow \\ C+ & & C+ \end{array} \right)$$

$$\Sigma_*(X, x) := (X, x) \wedge (S^1, 1)$$

$$= \text{pushout} \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & C_+X \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_+ & & C_+ \end{array} \right)$$

$$= \frac{X \times I}{X \times 0 \cup X \times 1 \cup x \times I}$$



3. wichtiges Beispiel:

$$\Sigma S^n \cong_{\text{homöo}} S^{n+1} \cong \Sigma_* S^n$$

Wegeraum
(path space)

$$X^I$$

$$P_*(X, x) = (X, x)^{(I, 1)}$$

(Wege, die im Basispunkt
enden)

Schleifenraum

$$X^{S^1}$$

$$\Omega_*(X, x) = (X, x)^{(S^1, 1)}$$

4. Notiz: $[\Sigma.X, Y] \cong [X, \Omega.Y]$.

für punktierte Räume X und Y

(Beweis: Wende π_0 an auf

$$\underset{\text{Def.}}{Y^{\Sigma.X}} = \underset{\text{Exp.-Gesetz}}{Y^{S^1 \wedge X}} \cong \underset{\text{Def.}}{(Y^{S^1})^X} = (\Omega.Y)^X \quad .)$$

Die Komposition $*$ von Schleifen definiert auf der rechten Seite eine Verknüpfung:

$$[X, \Omega.Y] \times [X, \Omega.Y] \xrightarrow{+} [X, \Omega.Y] \\ (f, g) \mapsto (x \mapsto f(x) * g(x))$$

Unter der Bijektion von 6.4 entspricht das:

$$[\Sigma.X, Y] \times [\Sigma.X, Y] \xrightarrow{+} [\Sigma.X, Y] \\ (f, g) \mapsto \left((x, t) \mapsto \begin{cases} f(x, 2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(x, 2t-1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \right)$$

5. Satz: Mit dieser Verknüpfung ist

$[\Sigma.X, Y]$ eine Gruppe, und

$[\Sigma^n.X, Y]$ eine abelsche Gruppe $\forall n \geq 2$.

$$\Sigma.(\underbrace{\Sigma \dots \Sigma}_{n \text{ mal}} X)$$

neutrales Element: konstante Abbildung

inverses von g : $(x, t) \mapsto g(x, 1-t)$

Ferner sind für punktierte Abbildungen

$$h: X \longrightarrow X'$$

$$k: Y \longrightarrow Y'$$

die Abb. $(\Sigma.h)^*: [\Sigma.X, Y] \longleftarrow [\Sigma.X', Y]$

und $k_*: [\Sigma.X, Y] \longrightarrow [\Sigma.X, Y']$

Gruppenhomomorphismen.

Für $X = (S^0, 1)$ ist $\Sigma.X \cong (S^1, 1)$ und

$$[\Sigma.X, Y] \cong \pi_1(Y)$$

ist die Fundamentalgruppe — i.A. nicht abelsch.

Beweis:

Gruppenstruktur, Homomorphismen wie für π_1 .

abelsch für $n \geq 2$:

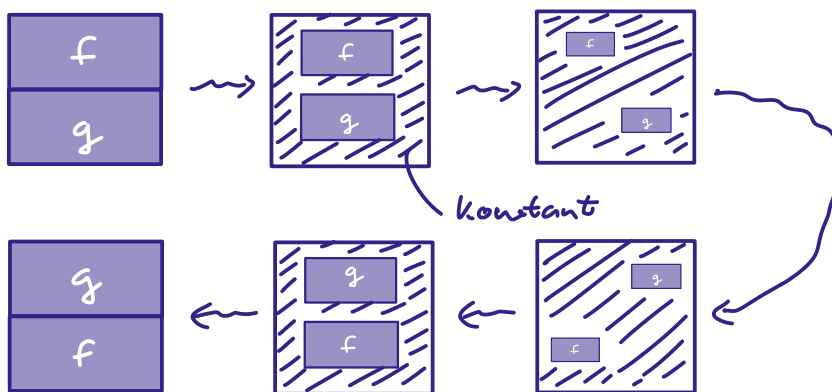
$$\begin{aligned} \text{Top.}(\Sigma^2 X, Y) &= \text{Top.}(S^2 \wedge X, Y) \\ &\cong \text{Top.}(S^2, Y^+) \quad (\text{Exponential-gesetz}) \\ &\cong \text{Top.}\left(\frac{I \times I}{\partial(I \times I)}, Y^+\right) \end{aligned}$$

$$\square \xrightarrow{f} Y^+$$

Rand $\mapsto$ konstante Abb.

$$\left(\square \xrightarrow{f} Y^+ \right) + \left(\square \xrightarrow{g} Y^+ \right) = \left(\begin{array}{c} \square \\ \hline \square \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y^+ \right)$$

Definiere Homotopie $f+g \rightsquigarrow g+f$ wie folgt:

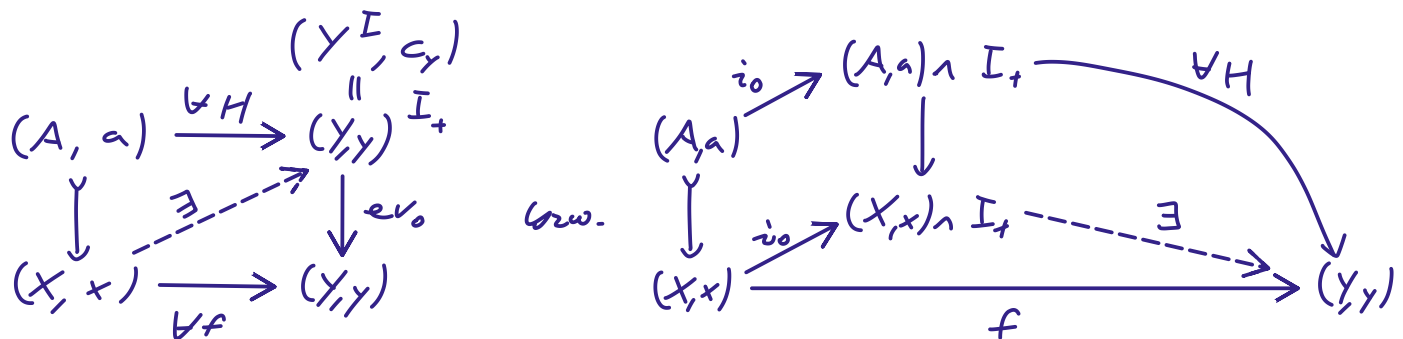


6. Def.: Ein punktierter Raum (X, x) ist **wohlpunktiert**, falls die Inklusion $x \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist.

6.5 Bsp.: Für $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$
ist $(X, \{0\})$ nicht wohlpunktiert.

6.6 Def.: **punktierte Kofaserung in Top.**

— analog zu Kofaserung in Top:



6.7 Notiz:

Ist $A \xrightarrow{i} X$ Kofaserung in Top mit $i(a) = x$,
so ist $(A, a) \xrightarrow{i} (X, x)$ Kofaserung in Top.

6.8. Bemerkung: falls (A, a) und (X, x) wohlpunktiert,
gilt auch die Umkehrung

[schwer, siehe May & Ponte, More Concise Algebraic Topology, Lemma 1.3.4]

[oder Strom, Theorem 5.95]

[Ergänzung 13.12.2024]

6.9 Bemerkung:

(a) Wie in Top gilt auch in Top.:

$A \xrightarrow{i} X$ Kofaserung $\Leftrightarrow M. i \hookrightarrow X \cap I_+$ Retrakt

(b) Jede Abb. $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ faktorisiert als

$$\begin{array}{ccc} (X, x) & \xrightarrow{f} & (Y, y) \\ & \searrow i_1 & \nearrow \simeq \\ & M.f & \end{array}$$

und falls (Y, y) wohlpunktiert ist ist i_1 eine punktierte Kofaserung.

Bsp.: Für $f: * \longrightarrow (Y, y)$ ist $i_1 = f$.

[Korrektur 13.12.2024]

Der Abbildungskegel/die Homotopiekofaser von $f: X \longrightarrow Y$ ist die Kofaser der zugehörigen Kofaserung $i_1: X \rightrightarrows M.f$.

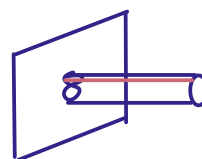
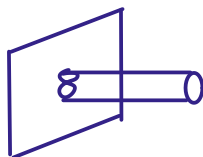
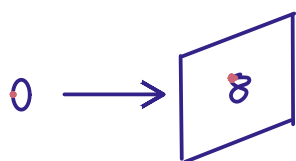
Top

Top.

Abbildungs-
zylinder von
 $f: X \longrightarrow Y$

$$M.f := Y \amalg_{f, i_0} (X \times I)$$

$$M.f = (Y, y) \amalg_{f, i_0} ((X, x) \wedge I_+)$$



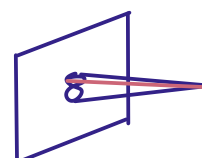
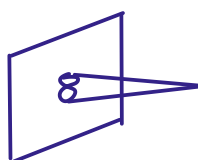
||
ein Punkt

Abbildungs-
kegel von
 $f: X \longrightarrow Y$

$$C.f := Y \amalg_{f, i_0} C.X$$

$$C.f = (Y, y) \amalg_{f, i_0} C.(X, x)$$

$$= \frac{M.f}{X \times \{1\}}$$



$$\begin{array}{ccccc} & X & \xrightarrow{f} & Y & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ X & \xrightarrow{i_1} & X \times I & \longrightarrow & M.f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & C.X & \longrightarrow & C.f \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & X & \xrightarrow{f} & Y & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ X & \xrightarrow{i_1} & X \wedge I_+ & \longrightarrow & M.f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & C.X & \longrightarrow & C.f \end{array}$$

6.10 Satz:

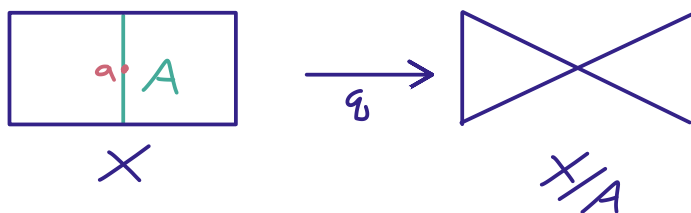
Für jede Kofaserung $A \xrightarrow{i} X$ in Top oder Top_* mit A zusammenziehbar (in Top bzw. Top_*) ist die kanonische Projektion

$$X \longrightarrow X/A$$

eine Homotopieäquivalenz.

Beweis: für Top , siehe Blatt 3, Aufgabe 4

Idee:



Benutze HEE von i , um

$$H: \text{id}_A \rightsquigarrow \begin{array}{c} | \\ \longrightarrow \bullet \\ | \end{array} \quad (\text{Konst. } a)$$

zu erweitern zu einer Homotopie

$$\tilde{H}: \text{id}_X \rightsquigarrow \underbrace{\begin{array}{c} \text{rectangle with lines} \longrightarrow \text{rectangle with lines} \end{array}}_{\tilde{H}_1}$$

Faktoriere $\tilde{H}_1$ durch eine Abb.

$$l: \begin{array}{c} \text{figure-eight} \longrightarrow \text{rectangle with lines} \end{array}$$

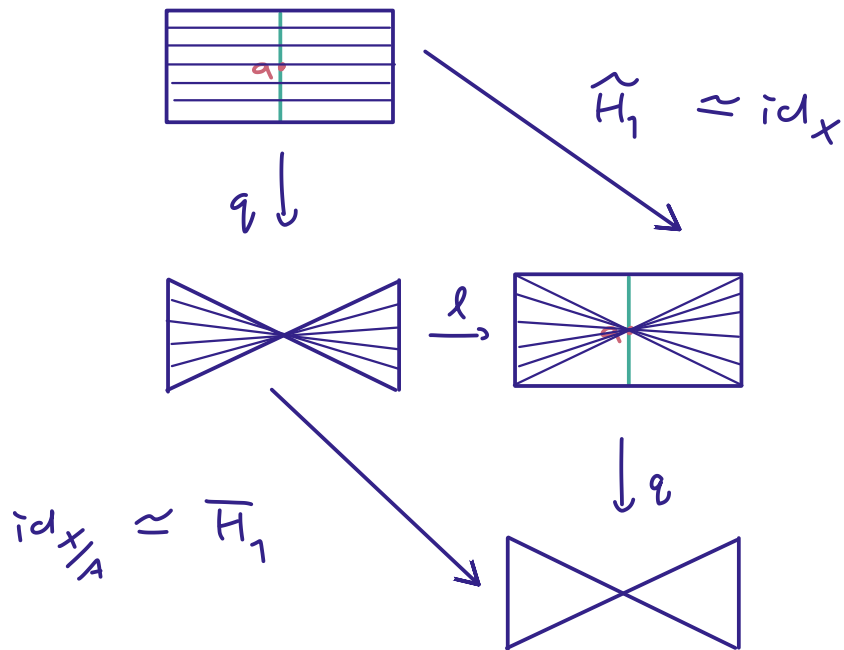
$X/A \qquad X$

Faktoriere $\tilde{H}$ durch q zu einer Homotopie

$$\overline{H}: \text{id}_{X/A} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{figure-eight} \longrightarrow \text{figure-eight} \end{array}$$

$X/A \qquad X/A$

Prüfe nun, dass ℓ Homotopieäquivalenz zu q ist:



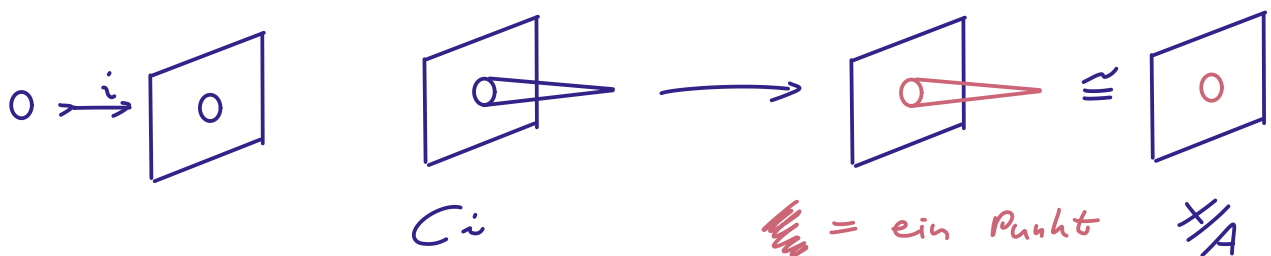
In Top.: analog

□

6.11 Korollar: Für jede Kofaserung $i: A \rightarrow X$ in Top oder Top. ist $Ci \rightarrow \frac{Ci}{CA} \cong \frac{X}{A}$
bzw. $C_*i \rightarrow \frac{X}{A}$

eine Homotopieäquivalenz.

Man nennt Ci deshalb auch Homotopiequotient oder Homotopiekofaser.



Beweis: Blatt 3, Aufgabe 5.

□

6.12 Korollar (wieder zu 6.10):

Ist (X, x) wohlpunktiert, so sind

$$CX \longrightarrow C_*(X, x)$$

und

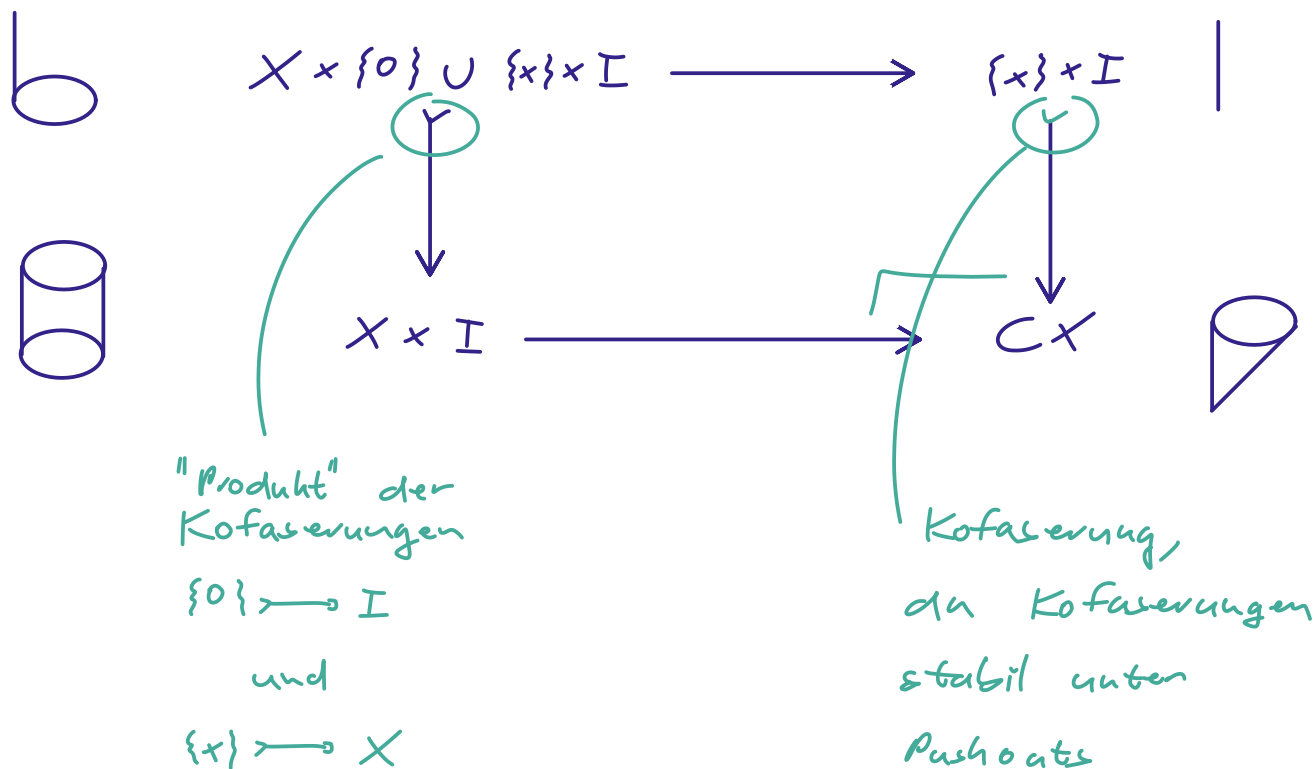
$$\Sigma X \longrightarrow \Sigma_*(X, x)$$

Homotopieäquivalenzen.

Beweis:

zu CX : $C_*(X, x) = \frac{CX}{\{x\} \times I}$, und $\{x\} \times I \hookrightarrow CX$

ist eine Kofaserung:



ΣX ähnlich

□

6.13 Def.: Die Puppesequenz / Kofasersequenz einer Abb. $f: X \rightarrow Y$ in Top. ist die Sequenz

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Cf \xrightarrow{\pi_Y} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \rightarrow \dots$$

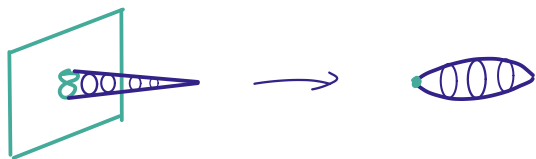


Hierbei ist:

• $i: Y \rightarrow Cf$ Inklusion aus Def.:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Cf \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{i} & Cf \end{array}$$

• $\pi: Cf \rightarrow Cf/Y \cong \Sigma X$ die Projektion



14. Satz: Für jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in Top. und jeden Raum Z in Top. ist die von der Puppesequenz induzierte Sequenz

$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{i^*} [Cf, Z] \xleftarrow{\pi^*} [\Sigma X, Z] \xleftarrow{(\Sigma f)^*} \dots$$

eine exakte Sequenz von punktierten Mengen
bzw. von Gruppen (rechts von $[\Sigma X, Z]$.)
bzw. von abelschen Gruppen
(rechts von $[\Sigma^2 X, Z]$.)

15. Erinnerung:

Eine Sequenz von Abb. von punktierten Mengen

$$(H, \gamma) \xrightarrow{g} (G, \gamma) \xrightarrow{f} (F, \varphi)$$

ist **exakt**, falls $g(H) = f^{-1}(\varphi)$.

Eine Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$H \xrightarrow{g} G \xrightarrow{f} F$$

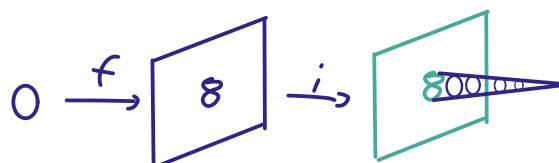
ist entsprechend exakt, falls $\text{im}(g) = \text{Ker}(f)$.

Beweis:

$$\boxed{i \circ f}$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Cf \\ & & \downarrow z & \nwarrow \bar{z} & \\ & & Z & & \end{array}$$

$f^* \circ i^* = (i \circ f)^*$ konstant, denn $i \circ f \simeq \text{konst.}$



$f^* \circ i^*$ exakt: Sei $f^* z$ konstant, also $z \circ f \simeq \text{konst.}$

Gesucht: $\bar{z}$ mit $\bar{z} \circ i \simeq z$.

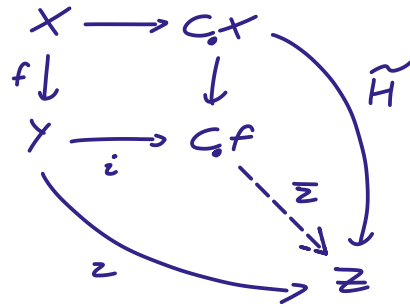
Wähle Homotopie $H: z \circ f \rightsquigarrow \text{konst.}$

$$H: X \wedge I_+ \longrightarrow Z$$

Diese faktorisiert durch $C.X$.

$$\tilde{H}: C.X \longrightarrow Z$$

Definiere $\bar{z}$ wie folgt:



Offenbar $i^* \bar{z} = z$.

Wir zeigen jetzt: bis auf Homotopieäquivalenz von Räumen und Homotopie und Vorzeichenwechsel von Abb. ist jede Komposition in der Puppesequenz von der Form $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Cf$.

„Vorzeichenwechsel“ heißt: wir müssen eventuell

$\Sigma g: \Sigma A \rightarrow \Sigma B$ ersetzen durch

$$(a, t) \mapsto (ga, t)$$

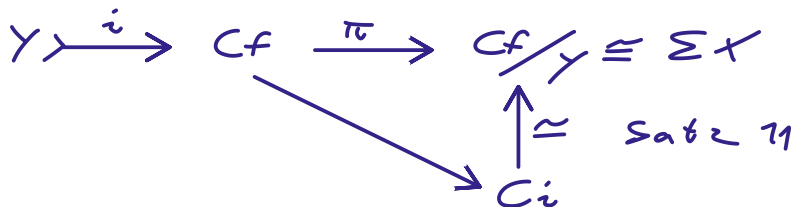
– $\Sigma g: \Sigma A \rightarrow \Sigma B$

$$(a, t) \mapsto (ga, 1-t)$$

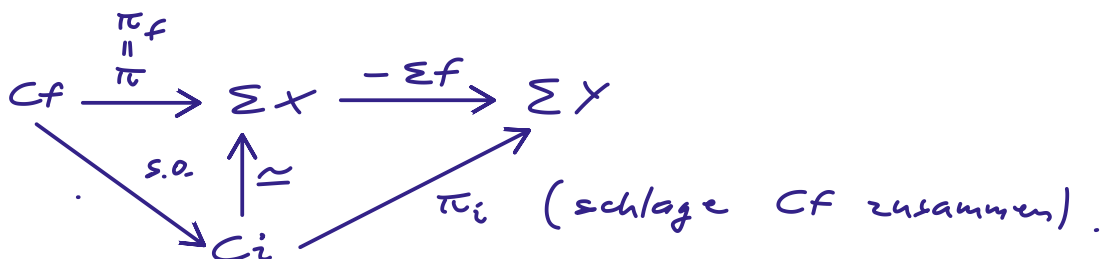
Beachte: $(-\Sigma g)^* = -(\Sigma g)^*$, daher haben

$(-\Sigma g)^*$ und $(\Sigma g)^*$ dasselbe Bild und denselben Kern.

$\pi \circ i$



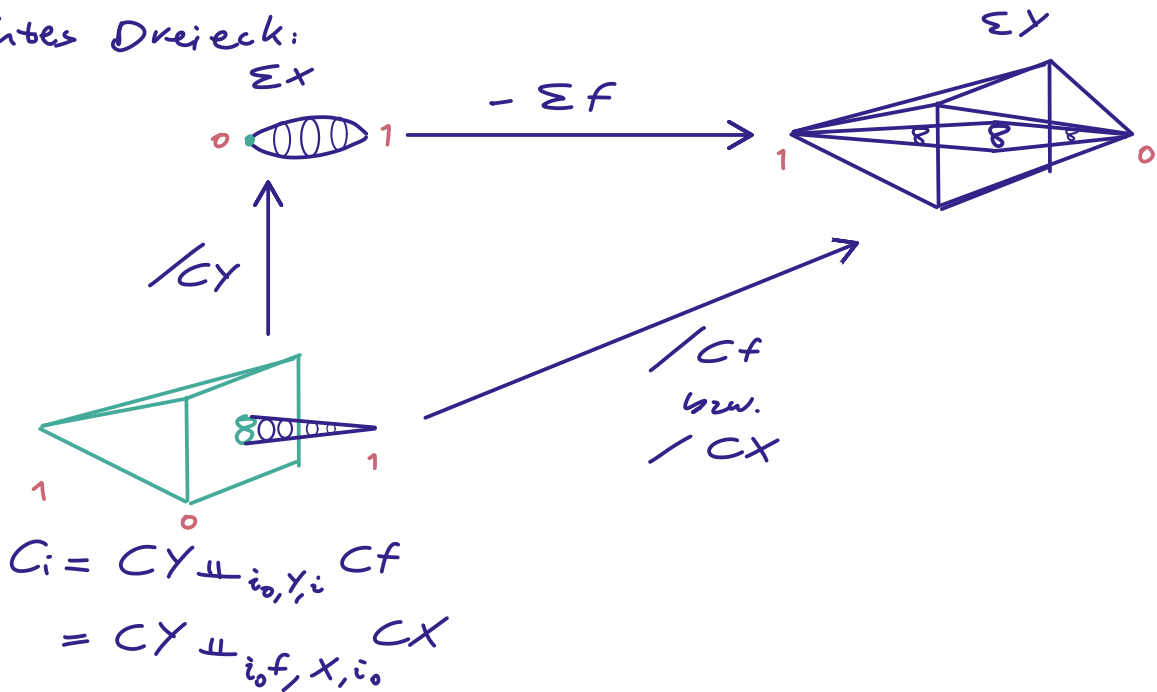
$\Sigma f \circ \pi$



Die Komposition $\cdot \searrow \cdot \nearrow$ hat dieselbe Form wie $\pi \circ i$ aus vorherigem Schritt.
Es reicht daher zu zeigen, dass beide Dreiecke in $HoTop$ kommutieren.

linkes Dreieck: kommutiert sogar in Top .

rechtes Dreieck:



auf CY :

$$\begin{array}{ccc}
 * = (z, 0) & \mapsto & (z, 1) = * \\
 \uparrow & & \nearrow \\
 (y, r) & & (y, r)
 \end{array}$$

auf CX :

$$\begin{array}{ccc}
 (x, s) & \mapsto & (fx, 1-s) \\
 \uparrow & & \nearrow \\
 (x, s) & & (z, 0) = *
 \end{array}$$

[„z“ bedeutet: „Koordinate egal“]

Definiere Homotopie H_t

auf CY :

$$(y, r) \mapsto (y, t \cdot r + (1-t))$$

auf CX :

$$(x, s) \mapsto (fx, (1-t)(1-s))$$

Die beiden Vorschriften stimmen überein auf Punkten

der Form $(fx, 0) \in CX$ bzw. $(x, 0) \in CX$, und
verkleben daher zu einer Homotopie auf Ci .

// Beweis für alle weiteren Kompositionen ergibt
sich induktiv aus Kommutativität des folgenden
Diagramms in $HoTop$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma i_f} & \Sigma Cf & \xrightarrow{\Sigma \pi_f} & \Sigma^2 X & \xrightarrow{\Sigma^2 f} & \Sigma^2 Y \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \varphi \cong & & \downarrow \tau \cong & & \downarrow \gamma \cong \\
 \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y & \xrightarrow{i_{\Sigma f}} & C\Sigma f & \xrightarrow{\pi_{\Sigma f}} & \Sigma^2 X & \xrightarrow{\Sigma^2 f} & \Sigma^2 Y
 \end{array}$$

für gewisse Homöomorphismen φ, τ, γ .

(ersetze induktiv $\Sigma^n f$ durch $\Sigma^{n-1} f$).

Details zu φ, τ, γ : siehe [May].

□

16. Def.: punktierte Faserung / Faserung in Top_*
 - analog zu Faserung in Top

$$\begin{array}{ccc} (Y, y) & \xrightarrow{\forall f} & (E, e) \\ \downarrow i_0 & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ (Y, y)_+ \xrightarrow{\forall H} & & (B, b) \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{ccccc} (Y, y) & \xrightarrow{\forall f} & & (E, e) & \\ & \searrow \exists \tilde{H} & & \downarrow p & \\ & & (E^I, e) & \xrightarrow{ev_0} & (B, b) \\ & \searrow \forall H & \downarrow p^I & & \\ & & (B^I, c) & \xrightarrow{ev_0} & (B, b) \end{array}$$

17. Notiz:

Ist $(E, e) \xrightarrow{p} (B, b)$ Faserung in Top_* , so ist
 auch $E \xrightarrow{p} B$ Faserung in Top

(Wende Diagramm rechts an auf Y_+).

18. Bemerkung: Sind (E, e) und (B, b) wohlpunktiert,
 so gilt auch die Umkehrung.

~~[schwer, siehe May & Pontryagin, More Concise Algebraic Topology, Lemma 1.3.4]~~

[schwer, siehe Strom, Theorem 5.95]

[Ergänzung 13.12.2024]

Top

Top_*

Abbildungs-
wegraum
zu

$$f: X \rightarrow Y$$

$$Ef := Y^{I_+}_{x_{ev_0, Y, f}} X$$

$$\begin{aligned} E.f &= (Y, y)^{I_+}_{x_{ev_0, Y, f}} (x, x) \\ &= (Ef, (c_Y, x)) \end{aligned}$$

Wie in Top gilt auch in Top_* :

- $(E, e) \xrightarrow{p} (B, b)$ Faserung $\Leftrightarrow \exists$ Schnitt von $(E, e)^{I_+} \rightarrow E.p$ (also eine Weghebeabb.)

- Jede Abb. $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)$ faktorisiert als

$$\begin{array}{ccc} (X, x) & \xrightarrow{f} & (Y, y) \\ & \searrow \scriptstyle = & \nearrow \\ & E.f & \end{array}$$

1.9 Def. Homotopiefaser $F.p$ von $(E, e) \xrightarrow{p} (B, b)$

ist die Faser der zugehörigen Faserung $E.p \xrightarrow{ev_1} (B, b)$

$$(\beta, e) \mapsto \beta(1)$$

über b .

$$F.p = \{ (\beta, e) \in B^I \times E \mid \begin{array}{l} \beta(0) = pe \\ \beta(1) = b \end{array} \}$$

$$\begin{array}{ccccc} F.p & \xrightarrow{\quad} & E.p & \xrightarrow{\quad} & (E, e) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow p \\ P.(B, b) & \xrightarrow{\quad} & (B, c_b)^I & \xrightarrow{ev_0} & (B, b) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow ev_1 & & \\ * & \xrightarrow{b} & (B, b) & & \end{array}$$

Wegen
die in
 p enden

20. Satz (dual zu Satz 10):

Ist $p: (E, e) \twoheadrightarrow (A, a)$ Faserung über zusammenziehbaren Basis (A, a) in Top., so ist die Inklusion

$$p^{-1}(a) \hookrightarrow (E, e)$$

eine Homotopieäquivalenz.

(Beweis: dual zu Beweis von Satz 10.)

21. Korollar: Für jede Faserung $p: (E, e) \twoheadrightarrow (B, b)$ ist

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b) & \hookrightarrow & F.p \\ e' & \mapsto & (c_b, e') \end{array}$$

eine Homotopieäquivalenz.

Beweis: dual zu Korollar 11:

Wende Satz 20 an auf $F.p$ (siehe Diagramm oben)

$$\begin{array}{c} F.p \\ \downarrow \\ p_*(B, b) \end{array}$$

Diese ist Faserung, denn p ist Faserung und Faserungen sind stabil unter Pullbacks, und hat per Konstruktion dieselbe Faser wie p . □

22 Def.: Die Fasersequenz einer Abb. $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)$ in Top. ist die Sequenz

$$\dots \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega i} \Omega F.f \xrightarrow{\Omega \pi} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} F.f \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

Hierbei ist:

- π die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} (\beta, x') & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & & & x' \\ & \searrow & & & \\ F.f & \xrightarrow{\quad} & E.f & \xrightarrow{\quad} & (X, x) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow f \\ P.(Y, y) & \longrightarrow & (Y, c_y) & \xrightarrow{ev_0} & (Y, y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \cdot i: \Omega Y &\longrightarrow F.f \\ \omega &\longmapsto (\omega, x) \end{aligned}$$

23. Satz: Für jede Abb. $X \xrightarrow{f} Y$ in Top. und jeden Raum T in Top. ist die von der Fasersequenz induzierte Sequenz

$$\dots \rightarrow [T, \Omega X] \rightarrow [T, \Omega Y] \xrightarrow{i_*} [T, F.f] \xrightarrow{\pi_*} [T, X] \xrightarrow{f_*} [T, Y].$$

eine exakte Sequenz

von punktierten Mengen.

bzw. von Gruppen (links von $[T, \Omega Y]$.)

bzw. von abelschen Gruppen (links von $[T, \Omega^2 Y]$.)

Beweis: analog zu Beweis von Satz 14.

An erster Stelle:

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & & \downarrow \epsilon & & \\ F \cdot f & \xrightarrow{\pi} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$f_* \circ \pi_*$ konstant, da $f \circ \pi \simeq \text{konstant}$:

$$(f \circ \pi)(\beta, x') = f(x') = \beta(0)$$

Wähle Homotopie

$$H_t(\beta, x') = \beta(t)$$

$$(H_1(\beta, x') = \beta(1) = \gamma \text{ konstant}).$$

$f_* \circ \pi_*$ exakt: Sei t gegeben durch, dass $f \circ t \simeq \text{konst.}$

$$\begin{array}{ccc} C.T = T \wedge (I, 1) & \xrightarrow{H} & Y \\ \text{bzw.} & T \xrightarrow{H^\#} & Y^{(I, 1)} = P.Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & & \searrow \epsilon & & \\ & & F \cdot f & \xrightarrow{\pi} & X \\ & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & P.Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$H^\#$ (from T to $P.Y$)

Nach Konstruktion ist $\pi \circ \overline{\epsilon} = \epsilon$

$$\text{also } \pi_* [\overline{\epsilon}] = [\epsilon]$$

usw.



Zusammenfassung:

Raum T definiert Funktoren $[-, T]_*: \text{HoTop}^{\circ P} \rightarrow \text{Set.}$
(Grp, Ab)

$[T, -]_*: \text{HoTop} \rightarrow \text{Set.}$
(Grp, Ab)

mit guten Eigenschaften.

Welchen Raum T sollen wir wählen?