

9 Freudenthalscher Einhängungssatz

Für jeden punktierten Raum X haben wir folgenden
Einhängungshomomorphismus:

$$\begin{aligned} \pi_q(X) &\xrightarrow{\Sigma.} \pi_{q+1}(\Sigma.X) \\ [S^v \xrightarrow{f} X] &\mapsto [\underbrace{\Sigma.S^v}_{S^{q+1}} \xrightarrow{\Sigma.f} \Sigma.X]. \end{aligned}$$

1. Theorem (Freudenthal):

Sei (X, x_0) wohlpunktiert und s -zusammenhängend.

Dann ist $\Sigma.$ surjektiv für $q = 2s + 1$

$\Sigma.$ bijektiv für $q \leq 2s$. □

2. Korollar: Für alle $n \geq 1$ ist $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$

und $\Sigma: \pi_n(S^n) \longrightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$

ist ein Isomorphismus.

Beweis des Korollars:

$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ (Korollar 7.11).

S^n ist $s = (n-1)$ -zusammenhängend (Satz 7.8)

Freudenthal: $\pi_n(S^n) \longrightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$

bijektiv für $n \leq 2 \cdot (n-1)$, also für $2 \leq n$. □

Der Satz gibt folgendes Bild für $\pi_2(S^n)$:

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.3
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/15$	$\mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/84 \oplus (\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	7.11
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/15$	$\mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/84 \oplus (\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/15$	$\mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/120 \oplus \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/84 \oplus (\mathbb{Z}/2)^5$	
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/30$	$\mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/72 \oplus \mathbb{Z}/2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/60$	$\mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/120$	$(\mathbb{Z}/2)^3$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/120$

→ Einhängungssatz