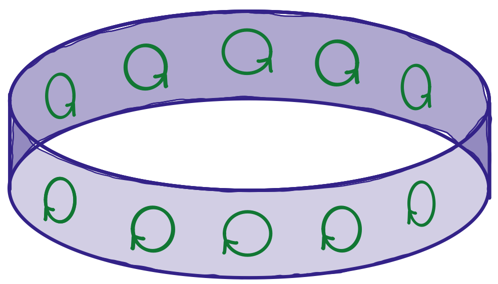
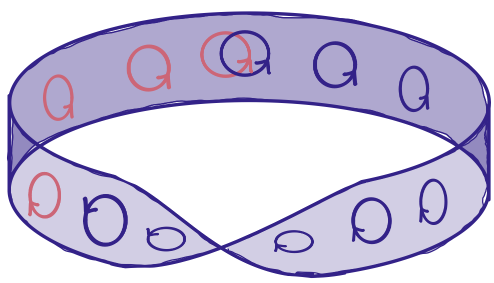
14. Orientierbarkeit

R kommutativer Ring.
M n-Mannigfaltigkeit, $x \in M$

$$H_i(M, M-x) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong H_i(D^n, S^{n-1})$$
(AUSSCHN.)
$$\cong \tilde{H}_i(S^n)$$
$$= \begin{cases} R & i=n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine „R-Orientierung" von M ist eine stetige Wahl von Erzeugern von $H_n(M, M-x) \cong R$. Für $R = \mathbb{Z}$ kommen an jedem Punkt x zwei verschiedene Erzeuger in Frage ($+1$ & -1) und eine „stetige Wahl" für alle x ist genau dann möglich, wenn M „anschaulich orientierbar" ist.





1. **Def.:** Eine R-Orientierung einer n-Mft. M ist eine Wahl von Erzeugern

$$M \ni x \longmapsto \xi_x \in H_n(M, M-x)$$

die stetig ist in folgenden Sinne:
Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von x und ein Element

$$[M_U] \in H_n(M, M-U),$$

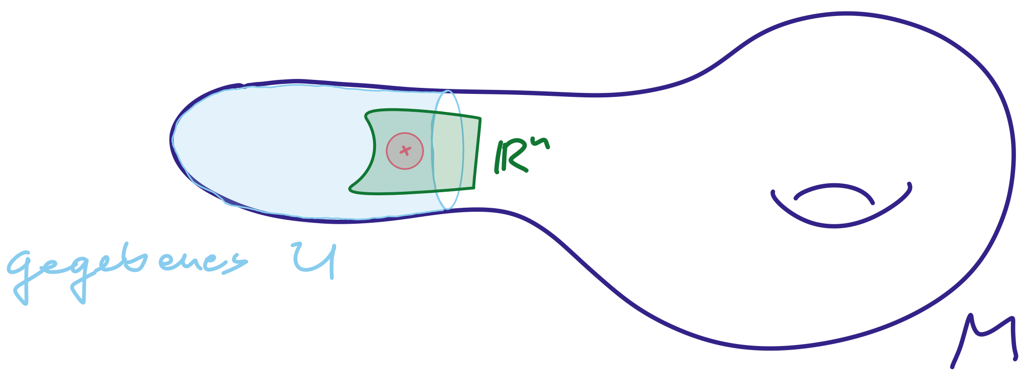
das für jedes $y \in U$ auf ξ_y abbildet:

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-U) & \longrightarrow & H_n(M, M-y) \\ [M_U] & \longmapsto & \xi_y \end{array}$$

M ist R-orientierbar, falls eine solche Wahl existiert.

2. **Bemerkung:** Wir können durch Verkleinerung von U stets erreichen, dass gilt:

- $U \cong \mathbb{R}^n$
- $H_n(M, M-U) \cong R$
- $[M_U] \in H_n(M, M-U)$ Erzeuger.



3. Def.: Ist M R-orientiert und $U \subseteq M$ beliebige Teilmenge, so heißt ein Element
$$[M_U] \in H_n(M, M-U),$$
das für jedes $y \in U$ unter
$$H_n(M, M-U) \longrightarrow H_n(M, M-y)$$
auf ξ_y abbildet, R-Fundamentalklasse (FK) von M auf U.
Für $M = U$ heißt ein entsprechendes Element
$$[M] \in H_n(M)$$
R-Fundamentalklasse von M.

Wenn wir R nicht nennen, meinen wir $R = \mathbb{Z}$.

4. Verschwindungssatz:
Für die Homologie einer n-Mft. mit Koeffizienten in beliebiger abelschen Gruppe gilt:
(a) $H_i(M) = 0 \quad \forall i > n$
(b) $H_n(M_0) = 0$ für jede nicht-kompakte Komponente M_0 von M

Zum Beweis benötigen wir:

5. Satz vom kompakten Träger
X ein Raum, $\xi \in H_q X$.
Es gibt einen kompakten Unterraum $K \subseteq X$, sodass ξ im Bild von $H_q K \longrightarrow H_q X$ liegt.
Wir nennen K dann kompakten Träger von ξ.

Beweis:

Ist X Zellkomplex, so lässt sich ξ per Def. als Linearkombination endlich vieler q-Zellen darstellen. Der Abschluss der Vereinigung dieser q-Zellen ist ein endlicher, also kompakter, Zellkomplex.

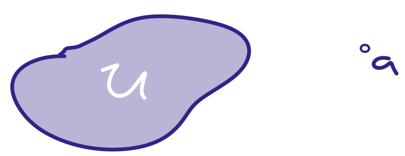
I. A. wähle zelluläre Approx. $g: X' \longrightarrow X$ und schreibe $\xi = g_* \xi'$. Ist dann K' kompakter Träger für ξ', so ist $K := g(K')$ kompakter Träger für ξ.

6. Lemma (Verschwindungssatz für offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$)

(a) Für jedes offene $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\tilde{H}_i(U) = 0 \;\; \forall i \geq n$.

(b) Für jedes offene $U \subseteq \mathbb{R}^n$, jedes $\xi \in \tilde{H}_{n-1}(U)$ gilt:

$$\xi = 0 \iff (j_a)_*(\xi) = 0 \text{ für } j_a: U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus a$$
$$\text{für jedes } a \in \mathbb{R}^n \setminus U.$$



Beweis:

a: Sei $\xi \in \tilde{H}_i(U)$, $i \geq n$.

Sei $K \subseteq U$ ein kompakter Träger für ξ.

Falls K Unterkomplex von $\mathbb{R}^n$ (für irgendeine Zellstruktur auf $\mathbb{R}^n$):

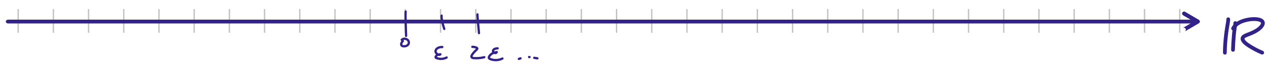
Betrachte

$$H_{i+1}(\mathbb{R}^n, K) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_i(K)$$

Wegen $\tilde{H}_*(\mathbb{R}^n) = 0$ ist ∂ surjektiv.
Andererseits ist
$$C_i(\mathbb{R}^n, K) = 0 \quad \forall i > n \quad \text{(aus Dimensionsgründen)}$$
also $H_i(\mathbb{R}^n, K) = 0 \quad \forall i > n$,
und es folgt $\tilde{H}_i(K) = 0 \quad \forall i \geq n$.
Somit ist $\xi = 0$.

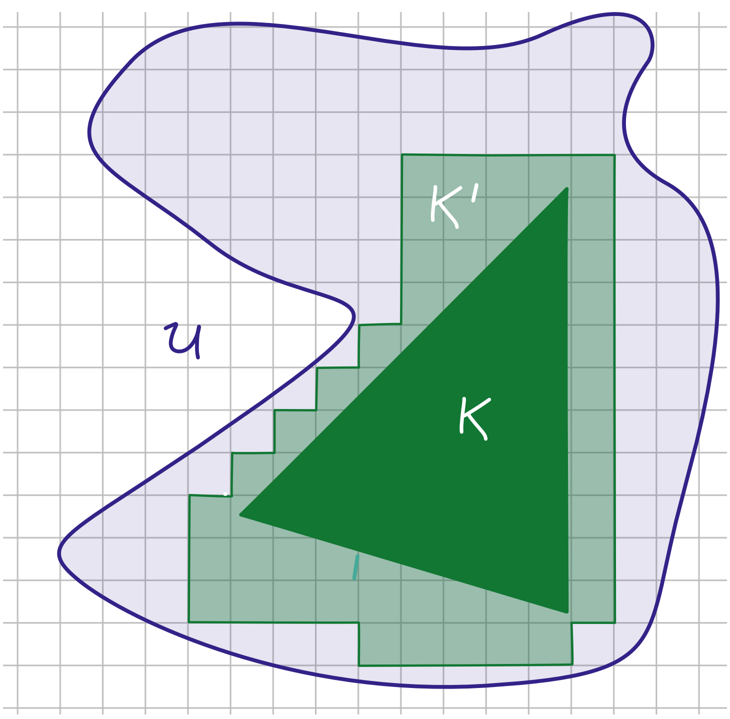
Im Allgemeinen:

Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir auf $\mathbb{R}$ Zellstruktur wählen mit 1-Zellen der Form $[n \cdot \varepsilon, (n+1) \cdot \varepsilon]$ $(n \in \mathbb{Z})$.



Das induziert Zellstruktur auf $\mathbb{R}^n$.
Indem wir ε klein genug wählen, können wir endlichen Unterkomplex $K' \subseteq \mathbb{R}^n$ finden mit
$$K \subseteq K' \subseteq U$$
(Abstand zu $\mathbb{R}^n \setminus U$ nimmt auf K Minimum an.)

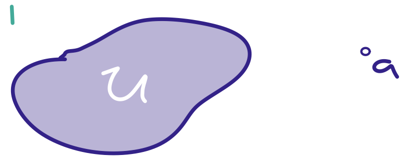
Ersetze also K durch K'!



(b) Für jedes offene $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, jedes $\xi \in \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U})$ gilt:

$$\xi = 0 \iff (j_a)_*(\xi) = 0 \text{ für } j_a : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus a$$

für jedes $a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$.



b ($\Leftarrow$):

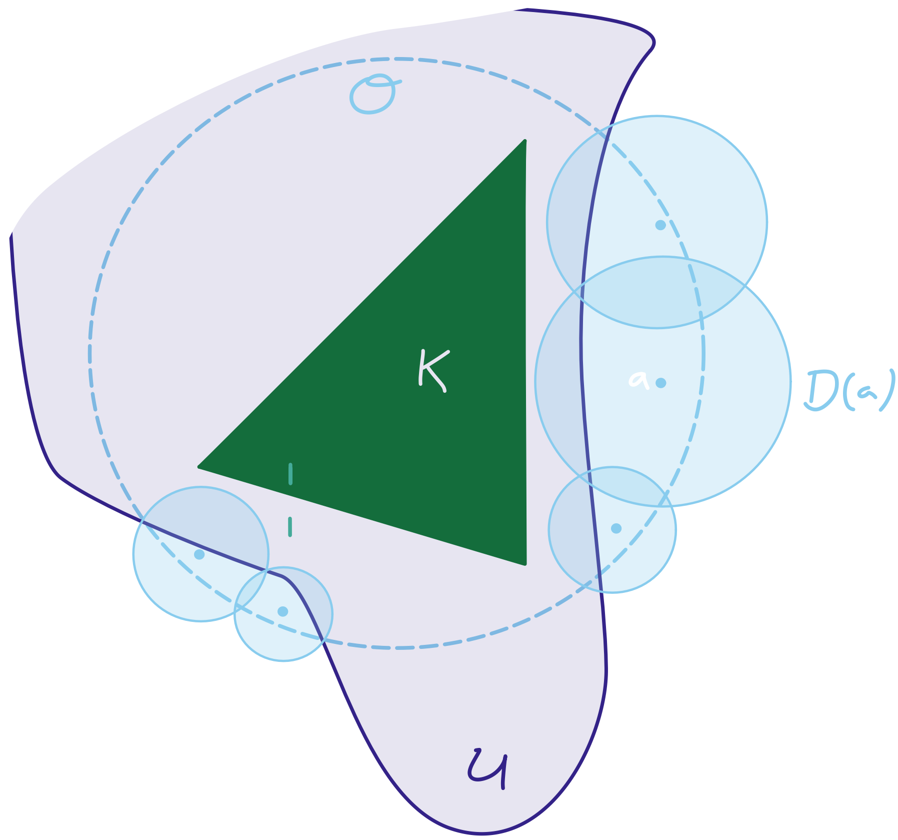
Sei $\xi \in \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U})$ mit $(j_a)_*(\xi) = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$.

zz: $\xi = 0$.

Sei $K \subseteq \mathcal{U}$ kompakter Träger für ξ,
$\xi_K \in \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U})$ gegeben mit $\xi_K \longmapsto \xi$.

Wähle offenen Ball $\mathcal{O}$ um K.

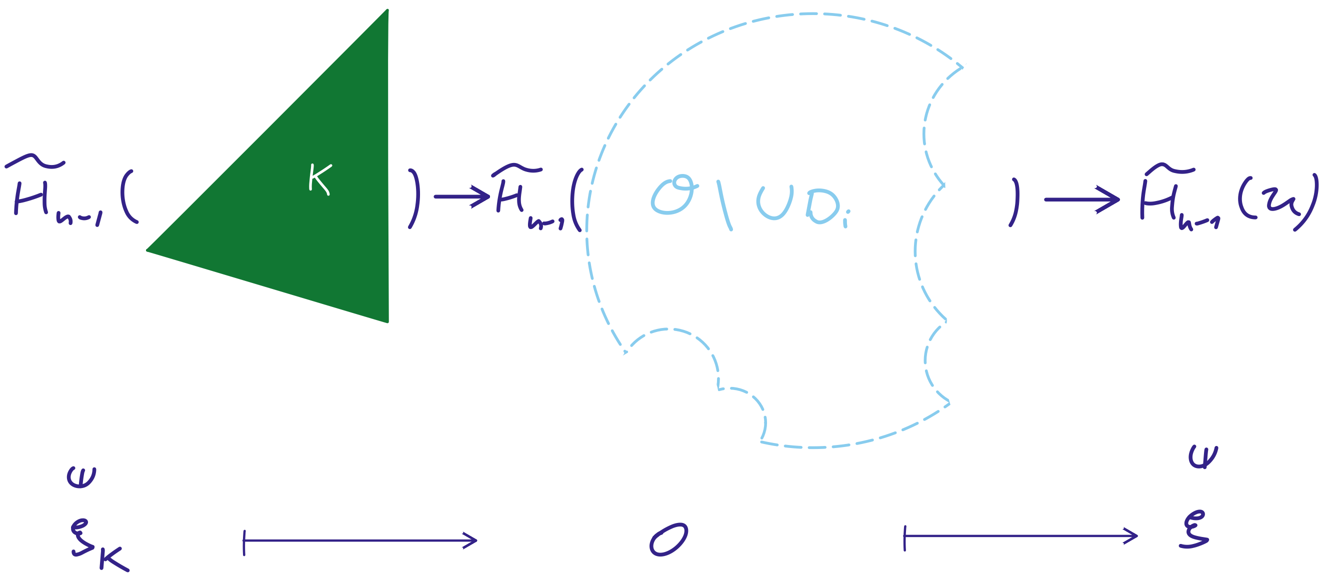
Überdecke $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{O}}$ durch abgeschlossene Bälle $D(a)$ um Punkte a, die K nicht schneiden. Weil $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{O}}$ kompakt ist, reichen endlich viele solcher Bälle $D_1, \dots, D_m$.



Es reicht zu zeigen: Das Bild von ξ_K in

$$\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{O} - D_1 \cup \ldots \cup D_m)$$

verschwindet:



Um zu zeigen, dass Bild von ξ_K verschwindet, führen wir Induktion über m.

I. A.: $\widetilde{H}_*(\mathcal{O}) = 0$.

I. S. ($m-1 \rightsquigarrow m$): Betrachte MV-Sequenz zu

$$V := \left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i\right) \cup (\mathbb{R}^n - D_m):$$

$$\underbrace{\widetilde{H}_n(V)}_{\substack{=0 \\ \text{nach (a)}}} \to \widetilde{H}_{n-1}\left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m} D_i\right) \hookrightarrow \begin{matrix} \widetilde{H}_{n-1}\left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i\right) \\ \oplus \\ \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - D_m) \end{matrix} \to \ldots$$

Nun ist ...

... Bild von ξ_K in $\widetilde{H}_{n-1}\left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i\right)$ Null nach I.V.

... Bild von ξ_K in $\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{O} - D_m)$ Null, denn D_m ist Ball um einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$,

und ξ wird Null in
$$\tilde{H}_{n-1}(\mathcal{O} - D_m) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus a)$$
nach Voraussetzung.

Wegen Injektivität in Sequenz oben folgt also Behauptung. $\square$

4. Verschwindungssatz:

Für die Homologie einer n-Mft. mit Koeffizienten in beliebiger abelschen Gruppe gilt:
(a) $H_i(M) = 0 \quad \forall i > n$
(b) $H_n(M_0) = 0 \quad$ für M_0 nicht-komp.

Beweis:

a: Sei $i > n$.
Sei $\xi \in H_i(M)$, K kompakter Träger von ξ, $\xi_K \in H_i(K)$ mit $\xi_K \longmapsto \xi$.
Da K kompakt, können wir K mit endlich vielen euklidischen Umgebungen $U_1, \dots, U_n$ überdecken.
$$K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m \subseteq M.$$
Es reicht zu zeigen:
$$H_i(U_1 \cup \dots \cup U_m) = 0.$$

IA ($m=1$): $H_i(U_1) \cong H_i(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \forall i > 0$.

IS ($m-1 \leadsto m$): Betrachte MV-Sequenz zu
$$V := U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}$$
$$U := U_m \cong \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{H_i(U\cap V)}_{0} \to \underbrace{\begin{matrix} H_iU \\ \oplus \\ H_iV \end{matrix}}_{0 \text{ nach IV.}} \to H_i(U\cup V) \to \underbrace{H_{i-1}(\underbrace{U\cap V}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n})}_{0 \text{ nach Satz 6 (a)}}$$

Also ist $H_i(U\cup V) = 0$.

b: Sei nun M nicht kompakt, zusammenhgd., n-dim. Wir zeigen zunächst:

Beh: Die Abb. $H_nM \longrightarrow H_n(M, M-a)$ ist Nullabb. $\forall a\in M$.

Bew.:

Sei $\xi \in H_nM$

Wir zeigen: $(i_a)_*(\xi) = 0 \quad \forall a\in M$.

$$H_n(M) \xrightarrow[(i_a)_*]{} H_n(M, M-a).$$

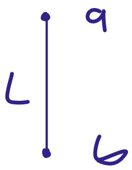
Sei dazu K kompakter Träger von ξ.

Da M selbst nicht kompakt ist, $\exists b\in M-K$.

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[d] & (K,K) \arrow[d] \\ M \arrow[r, hook] & (M, M-b) \end{tikzcd}$$

zeigt: $(i_b)_*(\xi) = 0$.



Ist a ein beliebiger Punkt in einer euklidischen Umgebung von b, so verbinde a und b durch einen geraden Weg L und betrachte:

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(M, M-a) \\
H_n(M) \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "(i_a)_*"] \arrow[drr, bend right, "(i_b)_*"'] & H_n(M, M-L) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & \\
 & & H_n(M, M-b)
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt: $(i_a)_*(\xi) = 0$.

Allgemeines $a \in M$ können wir durch endlich viele derartige Wegstücke mit b verbinden. [...] $\triangleleft$