

15. PD: Zwei Skizzen

6. Theorem (n -PD):

Sei M eine kompakte $\mathbb{R}$ -orientierbare n -Mf6.

Das n -Produkt mit einer FK $[M] \in H_n(M; \mathbb{R})$ definiert Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} H^p(M; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-p}(M; \mathbb{R}) \\ \alpha & \mapsto & \alpha \cap [M] \end{array}$$

8. Theorem (U -PD):

Sei R ein HIR, M eine kompakte $\mathbb{R}$ -orientierb. n -Mf6 mit FK $[M]$.

Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so ist

$$\begin{array}{ccc} H^p(M; \mathbb{K}) \times H^{n-p}(M; \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle \end{array}$$

eine perfekte Bilinearform.

Für beliebigen HIR R ist

$$\begin{array}{ccc} \frac{H^p(M; R)}{T^p} \times \frac{H^{n-p}(M; R)}{T^{n-p}} & \longrightarrow & R \\ (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) & \mapsto & \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle \end{array}$$

eine perfekte Bilinearform, wobei

$T^i \subseteq H^i(M; R)$ die Torsionsuntergruppe ist.

Zeigen zunächst: $\cap$ -P.D. $\Rightarrow$ $\cup$ -P.D.

(k) Koeff. in Körper k

Müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} H^{n-p}(M) &\longrightarrow \text{Hom}_k(H^p(M), k) = H^p(M)^\vee \\ \beta &\longmapsto (\alpha \mapsto \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Wegen

$$\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle = \langle \alpha, \beta \cap [M] \rangle$$

(Satz 13.5 (c)) können wir diese Abb. schreiben als:

$$\begin{aligned} H^{n-p}(M) &\xrightarrow{\omega} H_{n-p}(M)^\vee \longrightarrow H^p(M)^\vee \\ \alpha &\longmapsto \langle \alpha, - \rangle \\ &\quad \varphi \longmapsto (\beta \mapsto \varphi(\beta \cap [M])) \end{aligned}$$

Die Abb. ω ist Iso laut Koeff.-Theorem für H^* (Satz 10.4). Die zweite Abb.

$$\begin{aligned} \text{ist dual zu } H_{n-p}(M) &\longleftarrow H^p(M), \\ \beta \cap [M] &\longleftarrow \beta \end{aligned}$$

welche Iso ist laut $\cap$ -P.D.

(HIR R) Genauso, außer das Koeff.-Theorem nur einen Iso

$$\begin{aligned} H^{n-p}(M; R) / \text{Torsion} &\cong \text{Hom}_R(H_{n-p}(M), R) / \text{Torsion} \\ &\cong \text{Hom}_R(H_{n-p}(M) / \text{Tors.}, R) \end{aligned}$$

alle $H_i(M)$ sind endlich erzeugt,
daher $\text{Ext}(H_i(M), R)$ Torsionsgr.

□

Zwei Beweisideen zu Ω -P.D.

A Allgemeiner Beweis

$$H^p(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M; \mathbb{R})$$

$\alpha \quad \mapsto \quad \alpha \cap [M]$

Naive Idee:

- zeige P.D. für $\mathbb{R}^n$
- nutze Mayer-Vietoris-Sequenz

Probleme:

- P.D. gilt nicht für $\mathbb{R}^n$ (N.B.: $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt)
- MV-Sequenzen für H^* und H_* gehen in entgegengesetzte Richtungen

Lösung:

1. Def.: Die Kohomologie mit kompaktem Träger eines Raums X ist gegeben durch

$$H_c^q(X) := \varinjlim_{\substack{K \subseteq X \\ \text{Kompakt}}} H^q(X, X-K)$$

Ein Element $x \in H_c^q(X)$ ist also repräsentierbar durch ein Element

$$x_K \in H^q(X, X-K);$$

zwei solchen Elemente x_{K_1}, x_{K_2} repräsentieren dasselbe x falls es ein kompaktes $L \supseteq K_1, K_2$ so dass

$$\begin{array}{ccc} x_{K_1} \in H^q(X, X-K_1) & \searrow & \\ x_{K_2} \in H^q(X, X-K_2) & \nearrow & H^q(X, X-L) \end{array}$$

auf dasselbe Element in $H^q(X, X-L)$ abbilden.

H_c^* ist bezüglich Inklusionen offener Teilumengen
 $U \xrightarrow{i} X$ kovariant: definiere

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^q(U) & \xrightarrow{i_*} & H_c^q(X) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \text{als: } \varinjlim_{K \subseteq U} H^q(U, U-K) & \xleftarrow[\cong]{(\text{Ausschn.})} \varinjlim_{K \subseteq X} H^q(X, X-K) \\
 & \nearrow & \\
 & \varinjlim_{K \subseteq U} H^q(X, X-K) &
 \end{array}$$

Sei nun M orientierbare n -MfB. Für jedes
 Kompakte $K \subseteq M$ existiert eine FK
 $[M_K] \in H_n(M, M-K)$ von M auf K
 (Beweis zu Satz 14.7). Wir können Klassen
 in kompatibler Weise wählen, sodass folgende
 Diagramme für $K_1 \subseteq K_2$ kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(M, M-K_1) & \xrightarrow{\cap [M_{K_1}]} & H_{n-i}(M) \\
 \downarrow & & \parallel \\
 H^i(M, M-K_2) & \xrightarrow{\cap [M_{K_2}]} & H_{n-i}(M)
 \end{array}$$

Durch Übergang zum Kolimes erhalten wir
 Abb.

$$H_c^i(M) \longrightarrow H_{n-i}(M)$$

2. Theorem ($\cap$ -P.D. mit kompaktem Träger)

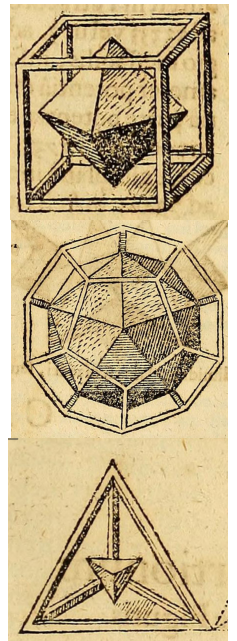
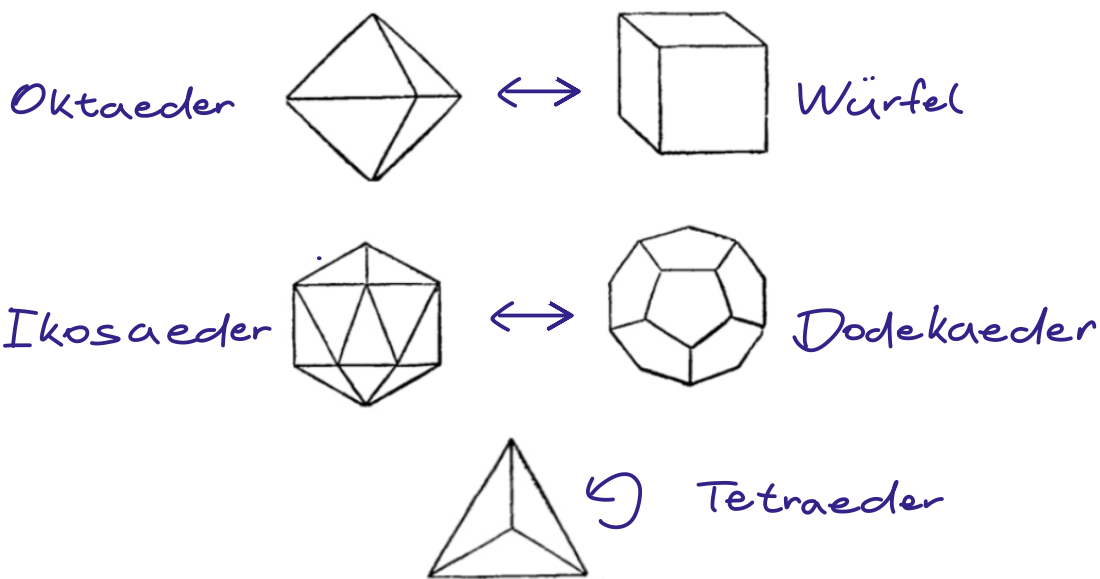
Diese Abb. sind für alle orientierbaren
 n -MfB. Isomorphismen.

Wenn M kompakt ist, ist $H_c^*(M) = H^*(M)$,
sodass wir aus Theorem 2 n -P.D. für
gewöhnliche H^* erhalten.

Für Theorem 2 lässt sich naive Idee oben
umsetzen — siehe [May, §20.5].

B historischer Beweis (für diff. bare Mannigfaltigkeiten)

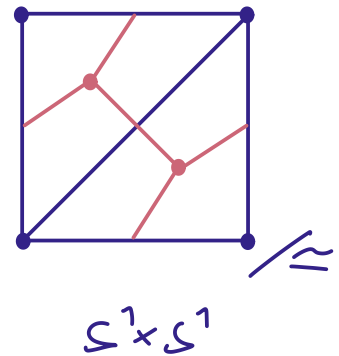
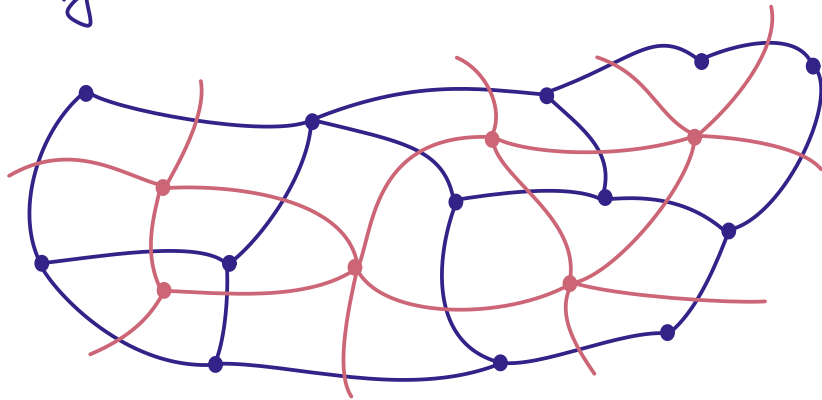
„Duale Zellstrukturen“ verallgemeinern die
„Dualität“ zwischen platonischen Körpern



Ecken $\leftrightarrow$ Seiten
Kanten $\leftrightarrow$ Kanten
Seiten $\leftrightarrow$ Ecken

Jeder platonische Körper definiert eine Zellstruktur
auf S^2 . Duale Paare platonischer Körper
definieren duale Zellstrukturen.

Allgemeinere Bilder in Dim. 2:



siehe auch [Hatcher, Einkleitung zu §3.3].

Technische Herausforderung:

Auf jeder diff-baren Mannigfaltigkeit existiert eine (simpliciale) Zellstruktur und hierzu duale Zellstruktur.

Wir erhalten hieraus 2 assoziierte zelluläre Kettenkomplexe $C_*(M)$ & $D_*(M)$ mit

$$C_i(M) \cong D_{n-i}(M)$$

Beweisidee zu P.D.:

Für orientierbare kompakte n -Mfb. liefert die Konstruktion der dualen Zellstruktur sogar kanonische Isomorphismen

$$(*) \quad C_i(M)^\vee \cong D_{n-i}(M),$$

die mit den Differentialen verträglich sind.

Daher ist

$$H^i(M) \stackrel{\text{Def.}}{\cong} H_{-i}(C_*(M)^\vee)$$

$$\stackrel{(*)}{\cong} H_{n-i}(D_*(M)) \stackrel{\text{Def.}}{\cong} H_{n-i}(M)$$

