

1. Abbildungsräume

Lineare Algebra

Vektorräume
lineare Abb.

$U \vee R$

$Q \vee R$

$V \oplus W, \pi_i: V$

$V \oplus W, \oplus_i: V$

$\text{Hom}_K(V, W)$

↑
lineare Abb.
bilden wieder
einen VR

Topologie

topologische Räume
stetige Abb.

Unterraum

Quotiententop.

Produkt Räume $X \times Y$

Summen $X \sqcup Y$

$\underline{\text{Top}}(X, Y)$

↑
stetige Abb.
bilden auch
wieder einen
top. Raum

X, Y top. Räume

$\text{Top}(X, Y) := \{ f: X \rightarrow Y \text{ stetig} \}$

Für $K \subseteq X$ kompakt und

$\mathcal{O} \subseteq Y$ offen sei

$M(K, \mathcal{O}) := \{ f \in \text{Top}(X, Y) \mid f(K) \subseteq \mathcal{O} \}$

1. Def.: Die KO -Topologie auf $\text{Top}(X, Y)$ ist die kleinste Topologie, die die Mengen $M(K, \mathcal{O})$ für alle kompakten $K \subseteq X$ und offenen $\mathcal{O} \subseteq Y$ enthält.

Konkret ist $\mathcal{U} \subseteq \text{Top}(X, Y)$ offen in der KO -Topologie, wenn jedes $f \in \mathcal{U}$ in einem endlichen Schnitt

$$M(K_1, \mathcal{O}_1) \cap \dots \cap M(K_n, \mathcal{O}_n)$$

liegt, der ganz in $\mathcal{U}$ enthalten ist.

$$f \in \bigcap_{i=1}^n M(K_i, \mathcal{O}_i) \in \mathcal{U}$$

2. Def.: Der Abbildungsraum $\underline{\text{Top}}(X, Y)$ ist die Menge $\text{Top}(X, Y)$ mit der KO-Topologie.

3. Beispiel: $\underline{\text{Top}}(\underbrace{\{1, \dots, n\}}_{\text{diskret}}, \underbrace{Y}_{\text{beliebig}}) \cong \underbrace{Y \times \dots \times Y}_n$

(Beweis: Wir haben jedenfalls zueinander inverse Bij.

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\varphi} & (f(1), \dots, f(n)) \\ \underbrace{(i \mapsto \gamma_i)}_{\substack{\text{stetig, da} \\ \{1, \dots, n\} \text{ diskret}}} & \xleftarrow{\psi} & (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \end{array}$$

φ ist stetig, denn für offenes $\mathcal{O} \in Y$ ist

$$\varphi^{-1}(\underbrace{pr_i^{-1}(\mathcal{O})}_{Y \times Y \times \dots \times \mathcal{O} \times Y \times \dots \times Y}) = M(\{i\}, \mathcal{O}) \text{ offen.}$$

— Erzeuger der Produkttopologie

ψ ist stetig, denn für offenes $\mathcal{O} \in Y$ ist

$$\psi^{-1}(M(K, \mathcal{O})) = \bigcap_{i \in K} pr_i^{-1}(\mathcal{O}) \text{ offen.} \quad \square$$

4. Bsp.: Sei X kompakter Hd-Raum,
 (Y, d) metrischer Raum.

Dann ist die KO-Topologie auf $\text{Top}(X, Y)$
 die von der Metrik der gleichmäßigen
 Konvergenz

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d(fx, gx)$$

induzierte Topologie.

(Beweis:

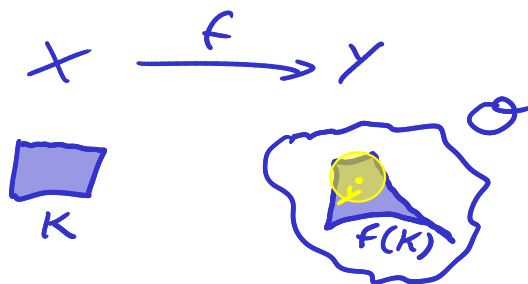
Supremum existiert:

Das Bild von $X \xrightarrow{(f, g)} Y \times Y \xrightarrow{d} \mathbb{R}$ ist kompakt,
 da X kompakt, also beschränkt.

offen in KO-Topologie $\Rightarrow$ offen bzgl. d .

Sei $f \in M(K, \mathcal{O})$

zz: $M(K, \mathcal{O})$ enthält offene ε -Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(f)$
 von f bzgl. d .



Da Y metrisch, existiert jedenfalls für jedes
 $y \in f(K)$ eine ε -Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(y) \subseteq \mathcal{O}$.

Da K und somit $f(K)$ kompakt,

überdecken endlich viele $\mathcal{U}_{\varepsilon_1/3}(y_1), \dots, \mathcal{U}_{\varepsilon_n/3}(y_n)$
 die Menge $f(K)$.

Für $\varepsilon := \min \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ gilt tatsächlich

$$\mathcal{U}_{\varepsilon/3}(f) \subseteq \mathcal{M}(K, \mathcal{O}):$$

Sei $g \in \mathcal{U}_{\varepsilon/3}(f)$, $x \in K$. z.z: $gx \in \mathcal{O}$.

$$d(gx, \gamma_i) \leq d(gx, fx) + \underbrace{d(fx, \gamma_i)}_{\varepsilon/3}$$

$\in \varepsilon/3$
für ein i

$$< \varepsilon,$$

d.h. $g(x) \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(\gamma_i) \subseteq \mathcal{O}$. Also $gx \in \mathcal{O}$. ✓

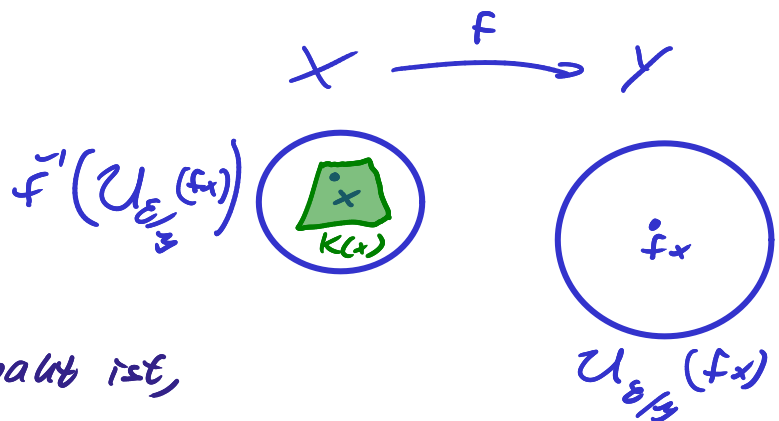
offen in KO -Topologie $\Leftrightarrow$ offen bzgl. d

Sei $\mathcal{U}_{\varepsilon}(f)$ gegeben.

z.z.: $\exists K_1, \dots, K_n$ kompakt in X und

$\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ offen in Y sodass

$$f \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}(K_i, \mathcal{O}_i) \subseteq \mathcal{U}_{\varepsilon}(f)$$



Da X lokal kompakt ist,

existiert zu jedem $x \in X$ eine

kompakte Umgebung $K(x)$ mit $K(x) \subseteq f^{-1}(U_{\varepsilon/3}(fx))$

Da X kompakt ist, überdecken endlich viele

$K(x_1), \dots, K(x_n)$ ganz X .

Wähle $K_i := K(x_i)$,

$\mathcal{O}_i := U_{\varepsilon/3}(f(x_i))$.

Sei $g \in \bigcap_{i=1}^n M(K_i, \mathcal{O}_i)$.

Dann ist für jedes $x \in X$

$$d(gx, fx) \leq d(gx, f_{x_i}) + d(f_{x_i}, fx)$$

$$< \underbrace{\epsilon/3}_{\text{für ein } i \text{ (so dass } x \in K(x_i))} + \epsilon/3$$

$$\leq 2\epsilon/3, \text{ also}$$

$$d(g, f) < \epsilon.$$

□

5. Satz: Für stetige Abb. $Y \xrightarrow{g} Y'$

und

$$X' \xrightarrow{f} X$$

sind auch die Abb.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Top}}(X, Y) & \xrightarrow{g_*} & \underline{\text{Top}}(X, Y') \\ \downarrow h & \mapsto & g \circ h \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Top}}(X', Y) & \xleftarrow{f^*} & \underline{\text{Top}}(X, Y) \\ h \circ f & \leftarrow & h \end{array}$$

stetig.

Beweis:

$$(g_*)^{-1} M(K, \mathcal{O}) = M(K, \underbrace{g^{-1}\mathcal{O}}_{\text{offen}})$$

$$(f^*)^{-1} M(K, \mathcal{O}) = M(\underbrace{f(K)}_{\text{kompakt}}, \mathcal{O})$$

□