Ab jetzt:

$$\text{Top} := \text{Top}'$$

top. Raum := lke sHd-Raum

$$\text{HoTop} := \text{HoTop}'$$

Abbildung := stetige Abb.

4: Kofaserungen

Ziel: Abbildungen in Top in „einfachere" Bestandteile zerlegen

Schwache Analogie: Einfache $\mathbb{R}$-lineare Abb. sind Monomorphismen, Epimorphismen und Isomorphismen, und jede $\mathbb{R}$-lineare Abb. lässt sich faktorisieren:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\text{Epi}"'] & & W \\ & V/_{\operatorname{Ker} f} \cong \operatorname{im}(f) \arrow[ur, "\text{Mono}"'] & \end{tikzcd}$$

Auch in Top lässt sich jede Abbildung in eine Surjektion gefolgt von einer Injektion zerlegen, aber diese Zerlegung ist für die Homotopietheorie irrelevant. Stattdessen studieren wir:

- Kofaserungen ($\rightarrowtail$)
- Faserungen ($\twoheadrightarrow$)
- (vorläufig) Homotopieäquivalenzen ($\xrightarrow{\simeq}$)

1. Def.: Eine (Hurewicz-) Kofaserung ist eine Abbildung $A \xrightarrow{i} X$, die bezüglich jeder Abb. $X \xrightarrow{f} Y$ die Homotopieerweiterungseigenschaft (HE) ($\rightarrow$ Def. 5) besitzt.

2. Satz (Kofaserkriterium):
Eine Abb. ist genau dann eine Kofaserung, wenn sie ein Umgebungsdeformationsretrakt ($\rightarrow$ Def. 8) ist.

3. Satz (Kofaserfaktorisierung):

Jede Abb. lässt sich faktorisieren in eine Kofaserung gefolgt von einer Homotopieäquivalenz.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, tail] & & Y \\ & Mf \arrow[ur, dashed, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

4. Satz (Konstruktionen mit Kofaserungen)

(a) Kompositionen von Kofaserungen sind Kofaserungen.

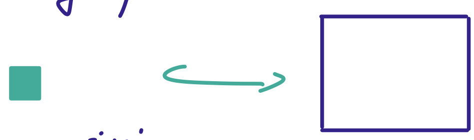
(b) Kofaserungen sind stabil unter Pushouts:

$$\left.\begin{array}{ll} A \overset{i}{\rightarrowtail} X & \text{Kofaserung} \\ A \xrightarrow{g} B & \text{beliebig} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B \rightarrowtail X \amalg_g B \ \text{Kofaserung}$$

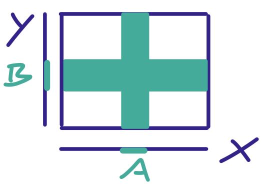
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "i"'] & B \arrow[d, tail] \\ X \arrow[r] & X \amalg_g B \end{tikzcd}$$

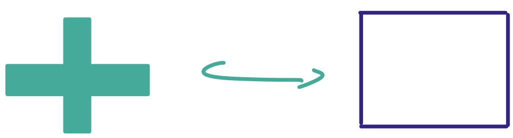
(c) Produkte von Kofaserungen sind Kofaserungen in folgendem Sinne:

$$\left.\begin{array}{ll} A \overset{i}{\rightarrowtail} X & \text{Kofaserung} \\ B \overset{j}{\rightarrowtail} Y & \text{Kofaserung} \end{array}\right\}$$



$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} A \times B \xrightarrow{i \times j} X \times Y & \text{Kofaserung} \\ A \times Y \cup X \times B \longrightarrow X \times Y & \text{Kofaserung} \end{array}\right.$$





5. Def.: Eine Abbildung $i: A \to X$ hat die **Homotopieerweiterungseigenschaft (HE)** bezüglich $f: X \to Y$, falls sich jede Homotopie auf A mit Anfang $f \circ i$ zu einer Homotopie auf X mit Anfang f fortsetzen lässt.

$$\begin{tikzcd}
& A \times I \arrow[d, "i \times id"'] \arrow[ddr, bend left, "\forall H"] & \\
A \arrow[ur, hook, "i_0"] \arrow[d, "i"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists \tilde{H}"] & \\
X \arrow[ur, hook, "i_0"] \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Äquivalent:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\forall H"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\
X \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Beweis zu Satz 4 (a) & (b):

a:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook] & Y^I \arrow[dd, "ev_0"] \\
A \arrow[d, hook] & \\
X \arrow[uur, dashed, "?"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Schritt 1:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "H"] \arrow[d, hook] & & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\
A \arrow[urr, dashed, "\exists \tilde{H}"] \arrow[r, hook] & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Schritt 2:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, hook] & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\
X \arrow[ur, dashed, "\tilde{\tilde{H}}"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

b:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "i"'] & B \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i'"'] & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, "g'"'] & X \amalg_g B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "?"] & Y \end{tikzcd}$$

Schritt 1:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "i"'] & B \arrow[r, "H"] & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, "g'"'] \arrow[urr, dashed, "\exists \widetilde{H}"] & X \amalg_g B \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Schritt 2:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "i"'] & B \arrow[d, "i'"'] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\ X \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "\widetilde{H}"'] & X \amalg_g B \arrow[dr, dashed, "\exists ! \widetilde{\widetilde{H}}"] & \\ & & Y^I \end{tikzcd}$$

$H \circ g \overset{?}{=} \widetilde{H} \circ i$

Prüfe ① $\widetilde{\widetilde{H}} \circ i' = H$ $\checkmark$

② $ev_0 \circ \widetilde{\widetilde{H}} = f$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "i"'] & B \arrow[d, "i'"'] \arrow[ddr, bend left] & \\ X \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right] & X \amalg_g B \arrow[dr, shift left, "ev_0 \circ \widetilde{\widetilde{H}}"] \arrow[dr, shift right, "f"'] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

$f \circ i' = ev_0 \circ H$

$ev_0 \circ \widetilde{\widetilde{H}} \circ i' = ev_0 \circ H$))

Schritt 1

$\downarrow$

$f \circ g' = ev_0 \circ \widetilde{H}$

$ev_0 \circ \widetilde{\widetilde{H}} \circ g' = ev_0 \circ \widetilde{H}$

$\uparrow$

Schritt 2.

Es folgt $f = ev_0 \circ \widetilde{\widetilde{H}}$ wegen UE des Pushouts. $\square$

Umgebungsdeformationsretrakte

Def: Eine Abbildung $A \xrightarrow{i} X$ ist ein **Retrakt**, falls eine Abbildung $A \xleftarrow{r} X$ existiert mit $r \circ i = id_A$. Ich nenne r dann **Retraktion**.

6. Lemma: Jeder Retrakt [von l.k.e. sHd-Räumen] ist eine Einbettung eines abgeschlossenen Unterraums.

Beweis:

$r \circ i = id_A$, also ist i injektiv.

Ferner $i(A) = \{ x \in X \mid i \circ r(x) = id_X(x) \}$

$$\left(= \text{equalizer} \left(X \overset{i \circ r}{\underset{id}{\rightrightarrows}} X \right) \right)$$

ist abgeschlossen in X (da X sHd, siehe Übung).
[Blatt 2, Aufgabe 4 (a)]

Topologie auf A ist Unterraumtopologie:

- Ist $U \subseteq A$ offen, so ist $U = i^{-1} \underbrace{r^{-1}(U)}_{\text{offen in } X}$.
- Ist $U = i^{-1}(V)$ für eine offene Menge $V \subseteq X$, so ist U offen in A, da i stetig. $\square$

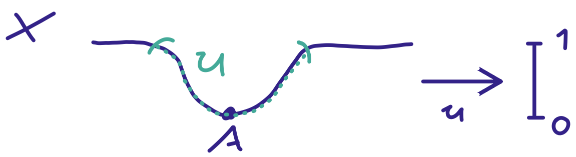
7. Def. Ein abgeschlossener Unterraum $A \subseteq X$ ist ein Umgebungsdeformationsretrakt (UDR), falls eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von A in X existiert und eine Abb.

$$H : X \times I \longrightarrow X$$

mit

$$H_0 \; (:= H(-,0)) = id_X$$
$$H_t|_A = id_A$$
$$H_1(\mathcal{U}) \subseteq A$$

Ferner muss eine Abbildung $u : X \longrightarrow I$ existieren mit $A = u^{-1}(0)$ und $\mathcal{U} = u^{-1}[0,1)$



Ein UDR ist ein Deformationsretrakt (DR), falls wi $\mathcal{U} = X$ wählen können.

8. Bemerkungen:

(a) DR $\Rightarrow$ Retrakt & Homotopieäquivalenz

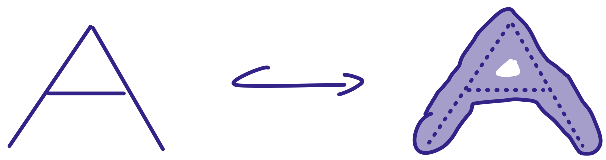
(Sei $H_1' : X \to A$ Faktorisierung von H_1 durch A.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_A"'] & X \arrow[r, "H_1'"] & A \end{tikzcd}, \qquad X \xrightarrow{H_1'} A \xrightarrow{i} X$$

ist homotop zu $H_0 = \mathrm{id}$.

Also ist H_1' Retraktion für i und Homotopie-inverses.)

(b) viele Bilder von DR in [Hatcher, S. 1 & 2].

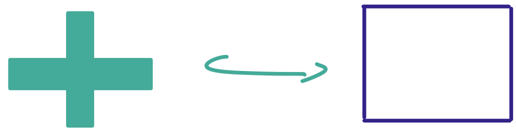


(c) DR $\not\Leftarrow$ Retrakt

z.B. $\cdot \hookrightarrow \bigcirc$ Retrakt, aber nicht DR.

9. Satz (vgl. Satz 4(c))

$$\left.\begin{array}{ll} A \hookrightarrow X & \text{UOR} \\ B \hookrightarrow Y & \text{UOR} \end{array}\right\} \Rightarrow A \times Y \cup X \times B \hookrightarrow X \times Y \ \text{UOR}$$



Ist einer der gegebenen UOR links ein DR, so ist auch der UOR rechts ein DR.

Beweis:

Sei u, H für $A \hookrightarrow X$ wie in Def. 7 gegeben.

Sei v, J für $B \hookrightarrow Y$ wie in Def. 7 gegeben.

Def. w, K für $A \times Y \cup X \times B \hookrightarrow X \times Y$:

$$w: X \times Y \longrightarrow I$$
$$(x, y) \longmapsto \min(ux, vy)$$

$$K: X \times Y \times I \longrightarrow X \times Y$$
$$(x, y, t) \longmapsto \begin{cases} (H_t(x), J_t(y)) & \text{falls } ux = vy \\ \left(H_{t \cdot \frac{vy}{ux}}(x), J_t(y)\right) & \text{falls } 0 \neq ux \geq vy \\ \left(H_t(x), J_{t \cdot \frac{ux}{vy}}(y)\right) & \text{falls } ux \leq vy \neq 0 \end{cases}$$

Prüfe:

- w stetig (da $\min: I \times I \to I$ stetig)
- $w^{-1}(0) = A \times Y \cup X \times B$
- K wohldef. ✓
- K stetig – s.u.
- $K_0 = \mathrm{id}$ ✓

- $K_t|_{A\times Y\cup X\times B} = \mathrm{id}$

Für $(a,y)\in A\times Y$ mit $y\notin B$ ist $0=ux<vy\neq 0$,

also $K_t(a,y) = (H_t(a), J_0(y))$

$= (a, y)$ ✓

Andere Fälle analog. [...]

- $K_1(x,y)\in A\times Y\cup X\times B$ für $(x,y)\in w^{-1}[0,1)$.

Falls $ux\geq vy$, dann $y\in v^{-1}[0,1)$; somit

$$K_1(x,y) = (H_{\frac{vy}{ux}}(x), \underbrace{J_1(y)}_{\in B})\in A\times Y\cup X\times B.$$

Andere Fälle analog.

K stetig:

Stetigkeit auf offener Menge $X\times Y\times I\setminus A\times B\times I$ klar, denn hier gibt es nur zwei Definitionszweige ($ux\geq vy$ & $ux\leq vy$), beide Bereiche abgeschlossen, Übereinstimmung auf Schnitt.

Stetigkeit in $(a,b,t)\in A\times B\times I$:

Sei $\mathcal{U}_a\times\mathcal{U}_b\subseteq X\times Y$ offene Umgebung von $K(a,b,t)=(a,b)$.

z.z.: $K^{-1}(\mathcal{U}_a\times\mathcal{U}_b)$ ist Umgebung von (a,b,t).

Da $a\in A$, ist $H(\{a\}\times I) = \{a\}$, also

$$\underbrace{\{a\}\times I}_{\text{kompaktes Rechteck}} \subseteq H^{-1}(a)\subseteq \underbrace{H^{-1}(\mathcal{U}_a)}_{\text{offen}}$$

Nach dem Rechtecklemma ([Blatt 1, Aufgabe 2]) existiert offene Umgebung V_a von a in X mit

$$V_a\times I\subseteq H^{-1}(\mathcal{U}_a)$$

Genauso $\exists$ offene Umgebung V_b von b in Y mit $V_b \times I \subseteq J^{-1}(U_b)$.

Nun ist $V_a \times V_b \times I$ Umgebung von (a,b,t) mit

$$K(V_a \times V_b \times I) \subseteq H(V_a \times I) \times J(V_b \times I) \subseteq U_a \times U_b,$$

also

$$(a,b,t) \in V_a \times V_b \times I \subseteq K^{-1}(U_a \times U_b). \qquad \square$$

Beweis von Satz 4(c) modulo Kofaserkriterium 2:

erste Aussage ($A \times B \longrightarrow X \times Y$ Kofaserung) folgt aus Def. von Kofaserung via HE und Exponentialgesetz — siehe Übung. [Blatt 3]

zweite Aussage ist genau Satz 9 oben. $\square$

Abbildungszylinder

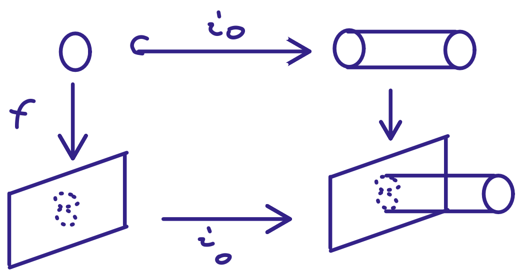
10. Def.: Der Abbildungszylinder Mf (mapping cylinder) einer Abb. $f: X \longrightarrow Y$ ist

$$Mf := Y \sqcup_{i_0} X \times I$$

Diagramm:

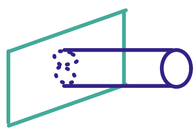
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Pushout}"] & X \times I \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "i_0"'] & Mf \end{tikzcd}$$

Bild:



11. Bemerkung (Übung [Blatt 3])

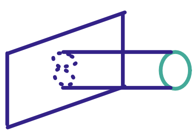
(a) Die kanonische Inklusion $i_0: Y \longrightarrow Mf$ ist ein DR. Eine Retraktion ist gegeben durch:



$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Pushout}"] & X \times I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f \circ \pi_X"] & \\ Y \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}"'] & Mf \arrow[dr, dashed, "\pi"] \arrow[r, phantom, "*"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $i_0 : Y \xrightarrow{\simeq} Mf$ Homotopieäq. mit Homotopieinversem π.

(b) Die kanonische Inklusion $X \overset{i_1}{\hookrightarrow} Mf$ (def. als Komposition $\begin{tikzcd} X \arrow[d, "i_1"] \\ X \times I \arrow[d] \\ Mf \end{tikzcd}$)



ist ein UDR.

Beweis des Faktorisierungssatzes 3 modulo Kofaserkriterium 2:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & Y \\
& Mf \arrow[ur, "\simeq", "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (x,1) \longmapsto \pi(x,1) \overset{*}{=} f \circ \pi_X(x,1)$$
$$= f(x)$$

12 Satz: Folgendes ist äquivalent:

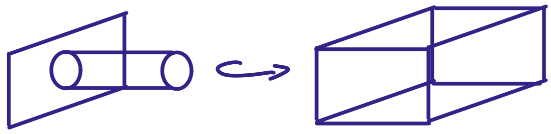
① $A \xrightarrow{i} X$ UDR

② $M_i \xrightarrow{(i\times id,\, i_0)} X\times I$ DR

③ $M_i \xrightarrow{(i\times id,\, i_0)} X\times I$ Retrakt

④ $A \xrightarrow{i} X$ hat HE bzgl. $X \xrightarrow{i_0} M_i$

⑤ $A \xrightarrow{i} X$ Kofaserung



Das beweist insbesondere das Kofaserkriterium 2.

Beweis:

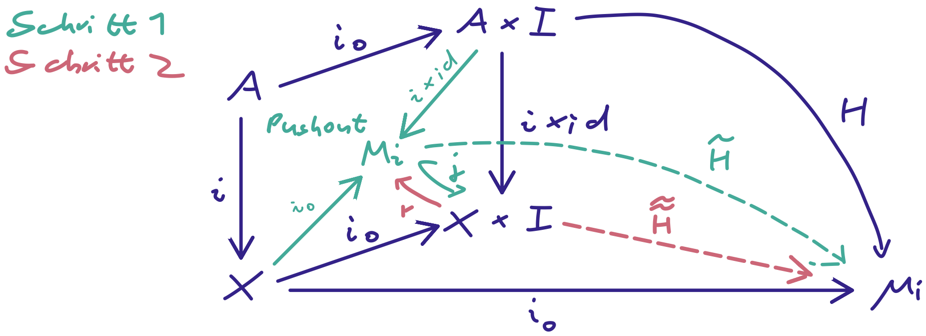
$(1 \Rightarrow 2)$ Folgt aus Produktsatz 5:

$$\left.\begin{array}{ll} A \xrightarrow{i} X & \text{UDR} \\ \{0\} \longrightarrow I & \text{DR} \end{array}\right\} \quad \underbrace{A\times I \cup X\times\{0\}}_{M_i} \longrightarrow X\times I \quad \text{DR}$$

$(2 \Rightarrow 3)$ ✓

$(3 \Rightarrow 4)$ Sei $j := (i\times id, i_0) : M_i \hookrightarrow X\times I$ aus ③.

Wähle Retraktion $M_i \xleftarrow{r} X\times I$, also $r\circ j = id$.



Nach UE des Pushouts M_i $\exists\, \tilde{H}$ mit $\tilde{H}\circ(i\times id) = H$,
$\tilde{H}\circ i_0 = i_0$.

Definiere $\tilde{\tilde{H}} := \tilde{H}\circ r$.

$$\tilde{\tilde{H}}\circ(i\times id) = \tilde{H}\circ r\circ(i\times id) = \tilde{H}\circ \underbrace{r\circ j}_{id}\circ(i\times id)$$
$$= \tilde{H}\circ(i\times id) = H \quad ✓$$

$$\tilde{\tilde{H}}\circ i_0 = \tilde{H}\circ \underbrace{r\circ j}_{id}\circ i_0 = \tilde{H}\circ i_0 = i_0 \quad ✓.$$

(4 ⇒ 5)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i"'] & A\times I \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "H"] & & \\
X \arrow[r] \arrow[rr, bend right=15] \arrow[rrr, bend right=30, "f"'] & X\times I \arrow[r, dashed, "K"] & M_i \arrow[r, dashed, "\tilde{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

$\tilde{H}$ existiert nach UE des Pushouts M_i.

K existiert nach Annahme ④.

(5 ⇒ 4) ✓

(4 ⇒ 3) sehr ähnlich zu (3 ⇒ 4) und (4 ⇒ 5).

(3 ⇒ 1)

$A \xrightarrow{i} X$ ist abgeschlossene Einbettung:

Das folgende Quadrat kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, tail, "i_1"] & X \arrow[d, tail, "i_1"] \\
M_i \arrow[r, tail] & X\times I
\end{tikzcd}$$

(UdR, vgl. Bem. 11)

($\overset{+}{\rightarrowtail}$: abgeschlossene Einbettung)

wegen ③, siehe Lemma 6

Also ist $i_1 \circ i$ eine abgeschlossene Einbettung, und da $i_1 : X \to X\times I$ abgeschl. Einbettung ist, ist auch i eine abgeschl. Einbettung.

Wir können also wieder $A \subseteq X$ und

$M_i = A\times I \cup X\times\{0\}$ annehmen.

Laut ③ existiert zu $j := (i\times id, i_0) : M_i \longrightarrow X\times I$

Retraktion $M_i \xleftarrow{r} X\times I$,

also $r\circ j = id$.

Def.: $H: X \times I \longrightarrow X$

$(x, t) \longmapsto \pi_X r(x,t)$

Projektion auf X-Koordinate

$\mathcal{U} := \{ x \in X \mid \pi_I r(x,1) > 0 \}$

Projektion auf I-Koordinate

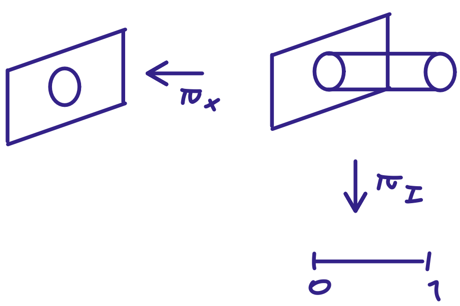
Prüfe:

- $A \subseteq \mathcal{U}$: Für $a \in A$ ist $(a,1) \in M_i$ und
  $r(a,1) = rj(a,1) = (a,1)$, also
  $\pi_I r(a,1) = 1 > 0$.

- $H_0 = id$ Für alle $x \in X$ ist $(x,0) \in M_i$, daher
  $r(x,0) = (x,0)$, also
  $\pi_X r(x,0) = x$.

- $H_t(a) = a$ für alle t, für alle $a \in A$:
  – analog, denn $(a,t) \in M_i$.

- $H_1(u) \in A$ für alle $u \in \mathcal{U}$:
  Aus $\pi_I r(u,1) > 0$
  folgt $\pi_X r(u,1) \in A$.



Definiere $u: X \longrightarrow I$

$x \longmapsto \max\{t - \pi_I r(x,t) \mid t \in I\}$

Prüfe:

- u wohldef. [...]
- u stetig (benutzt: KO-Topologie auf I^I ist induziert von Supremumsnorm §1) [...]
- $u^{-1}(0) = A$ [...]
- $u^{-1}[0,1) = U$ [...] $\square$