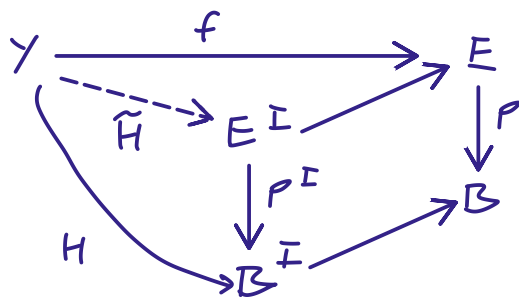


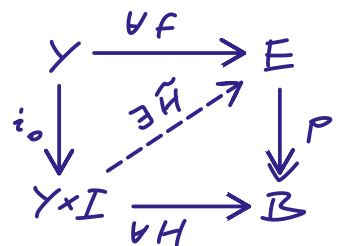
5. Faserungen

1. Def.: Eine (Hurewicz-)Faserung ist eine Abbildung $p: E \rightarrow B$, die bezüglich jeder Abb. $Y \xrightarrow{f} E$ die Homotopiehochhebungseigenschaft (HH) besitzt.

jede Homotopie H mit Ziel B und Anfang $p \circ f$ lässt sich zu einer Homotopie $\tilde{H}$ mit Ziel E hochheben, sodass die folgenden Diagramme kommutieren:



bzw.

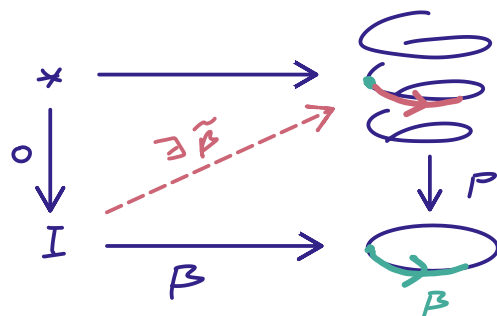


2. Bsp.: (HH) bzgl. $* \xrightarrow{e} E$ besagt:
jeder Weg in B in Anfang $p(e)$
lässt sich hochheben zu einem Weg in E
mit Anfang e .

3. Bsp.: Überlagerungen sind Faserungen:

- HH bzgl. $* \xrightarrow{e} E$: Einführung

[Skript Varghese WS2023/24: Lemma 14.2]



- HH $\forall f$ gilt auch vgl. [Laures-Szymik]

Wir werden allgemeiner sehen.

4. Satz: (Numerable) Faserbündel sind Faserungen.

⚠ Aber nicht alle Faserungen sind Faserbündel.

Wir werden außerdem sehen:

5. Satz: Faserfaktorisierung

Jede Abb. lässt sich faktorisieren in eine Homotopieäquivalenz gefolgt von einer Faserung:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \simeq & \nearrow \\ & Ef & \end{array}$$

6. Satz (Konstruktionen mit Faserungen)

(a) Kompositionen von Faserungen sind Faserungen.

(b) Faserungen sind stabil unter Pullbacks

$$\left. \begin{array}{l} E \xrightarrow{p} B \text{ Faserung} \\ C \longrightarrow B \text{ beliebig} \end{array} \right\} \Rightarrow C \times_B E \longrightarrow C \text{ Faserung}$$

$$\begin{array}{ccc} C \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\ C & \longrightarrow & B \end{array}$$

Beweis: Dual zum Beweis von Satz 4.4 (a) & (b).
(?) □

7. Satz: Ist $A \xrightarrow{i} X$ Kofaserung, so ist

für jeden Raum B

$$B^A \xleftarrow{B^i} B^X \text{ eine Faserung.}$$

Abbildungswegeraum

- dual zum Abbildungszylinder

8. Def.: Abbildungswegeraum Ef von $X \xrightarrow{f} Y$ ist das Pullback

$$Ef = Y \times_{f, Y} X \xrightarrow{\pi_X} X \xrightarrow{f} Y$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$Y \xrightarrow{ev_0} Y$$

konkret: $Ef = \{ (\beta, x) \mid x \in X, \beta \text{ Weg in } Y \text{ mit Anfang } f(x) \}$

$$\begin{array}{c} x_0 \\ \downarrow f \\ \rightarrow \beta \end{array}$$

9. Notiz:

(a) Die Inklusion $X \xrightarrow{i_c} Ef$ ist eine

Homotopieäquivalenz und Retrakt mit Homotopieinversen und Retraktion

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi_X} & Ef \\ x & \mapsto & (\beta, x) \end{array}$$

konstanter Weg in f_x

(b) Die Auswertung am Endpunkt $ev_1: Ef \rightarrow Y$ ist eine Faserung.

Beweis des Faktorisierungssatzes 5 mit Hilfe von Notiz 9:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_c & \simeq & \uparrow ev_1 \\ Ef & & Y \end{array}$$

$$(c_{f_x}, x)$$

$$c_{f_x}(1) = f_x$$

□

Beweis zu Notiz 9:

a: $\pi_x \circ i_c = \text{id}$

$i_c \circ \pi_x \simeq \text{id}$:

$$Ef \times I \longrightarrow Ef$$

$$((\beta, x), t) \longmapsto (\underbrace{\beta|_{[0,t]}}_{s \mapsto \beta(s \cdot t)}, x)$$

b: Sei

$$\begin{array}{ccc} u & \longmapsto & (\beta_u, x_u) \\ \mathcal{U} & \longrightarrow & Ef \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \text{ev}_1 \\ \mathcal{U} \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

Für jedes $u \in \mathcal{U}$ ist $H_0(u) = \beta_u(1)$.

Def. $\tilde{H}: \mathcal{U} \times I \longrightarrow Ef$

$$(u, t) \longmapsto \underbrace{(s \mapsto H_s(u))|_{[0,t]} * \beta_u, x_u}_{\parallel}$$

$H_1(u) \xleftarrow{(s \mapsto H_s(u))} \beta_u \xleftarrow{f} f(x_u)$

- $\tilde{H}(u, t) \in Ef$ ✓
- $\tilde{H}(u, 0) = (\beta_u, x_u)$ ✓
- $\text{ev}_1(\tilde{H}(u, 1)) = H_1(u)$ ✓

□

Weghebeabbildung

Idee: $E \twoheadrightarrow B$ Faserung

$\Leftrightarrow$ „alle Wege lassen sich gemeinsam hochheben“

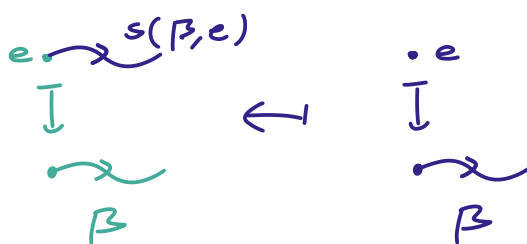
10. Def.: Eine Weghebeabb. für $E \xrightarrow{p} B$ ist eine Abb.

$$E^I \xleftarrow{s} E_p$$

mit $s(\beta, e)(0) = e$

und $p \circ s(\beta, e) = \beta \quad \forall (\beta, e) \in E_p.$

Konkret: $s(\beta, e)$ ist Lift von β mit Anfang e .



abstrakt: s ist ein Schnitt der kanonischen Abb.

$$\begin{array}{ccc} E^I & \xrightarrow{(p^I, e_0)} & E_p \\ \beta & \mapsto & (p \circ \beta, \beta(0)) \end{array}$$

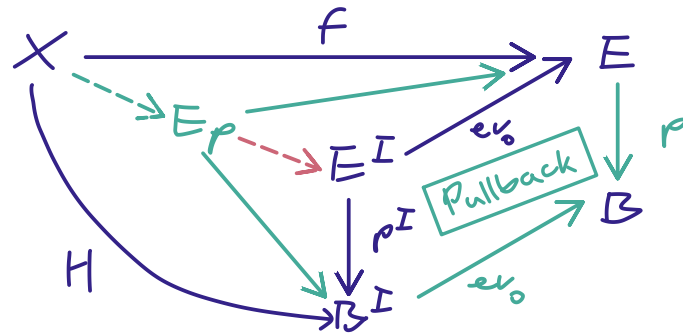
11. Satz: Für eine Abb. $E \xrightarrow{p} B$ sind äquivalent:

① p ist eine Faserung

② p hat HH bzgl. $E_p \xrightarrow{\quad} E$
 $(\beta, e) \mapsto e$

③ Für p existiert eine Weghebeabb.

Beweis: analog zu ③ $\Leftrightarrow$ ④ $\Leftrightarrow$ ⑤ in Satz 4.12
 Zum Beispiel ($2 \Rightarrow 1$)

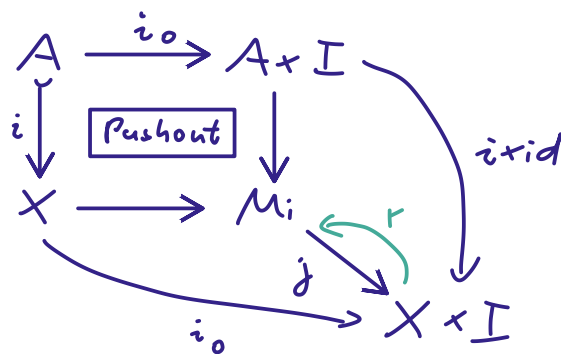


-----> existiert wegen $\mathcal{U}$ des Pullbacks E_p

-----> existiert nach Voraussetzung ②. □

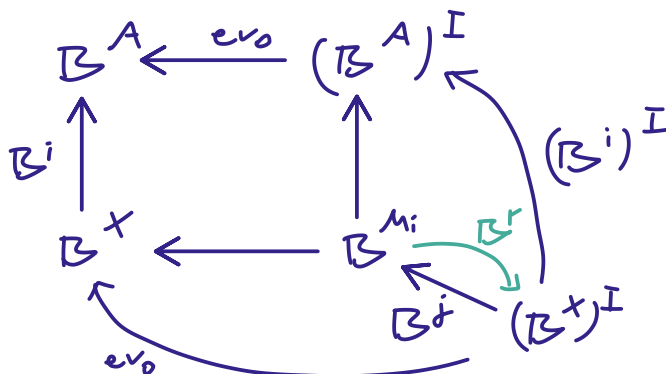
Beweis zu Satz 7:

Sei $A \xrightarrow{i} X$ Kofaserung, B beliebiger Raum.
 Dann ist nach Satz 4.12 M_i Retrakt von $X \times I$:



mit $r \circ j = id$

Wende $B^{()}$ an:



$B^{()}$ verwandelt Pushouts in Pullbacks

(-Übung). Also ist

$$B^{M_i} \cong E(B^i)$$

$$B^{\dagger} = (ev_0, (B^i)^{\dagger})$$

Aus $roj = id$ folgt $B^{\dagger} \circ B^r = id$.

Also ist B^r eine Weghebeabb. für B^i .

Somit ist $\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{B^i} & B \\ f \circ i & \hookleftarrow & f \end{array}$ eine Faserung (Satz 11).

□

Bündel sind Faserungen

F fest gewählter Raum

12. Def.: Ein Faserbündel mit Faser F ist eine Abb.

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ B \end{array}$$

derart, dass es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von B gibt, sodass für alle $U \in \mathcal{U}$ ein Homöomorphismus

$$\varphi_U: p^{-1}U \xrightarrow{\cong} U \times F$$

über U existiert, also ein Homöomorphismus, für den

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}U & \xrightarrow[\varphi_U]{\cong} & U \times F \\ p \downarrow & \swarrow \pi_U & \\ U & & \end{array}$$

Kommutiert.

Das Bündel heißt **trivial**, falls es über B isomorph ist zu $B \times F$:

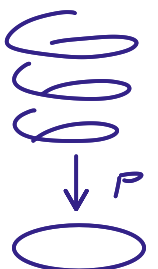
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\cong} & B \times F \\ \downarrow p & \swarrow \pi_B & \\ B & & \end{array}$$

Obige Homöomorphismen φ_U heißen entsprechend **lokale Trivialisierungen**.

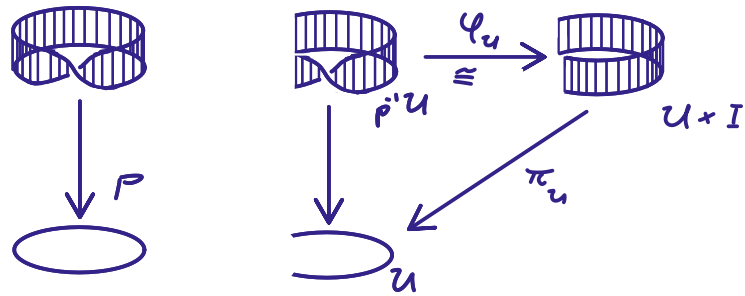
13. Bsp.:

(a) F diskret: Faserbündel mit Faser F sind $|F|$ -fache Überlagerungen

$$\begin{array}{l} E = \mathbb{R} \\ F = \mathbb{Z} \\ B = S^1 \end{array}$$



(b) $F = I$, $B = S^1$: Möbiusband



14. Def.: Eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines

Raums B ist **numerabel**, falls

(a) sie lokal endlich ist: jedes $b \in B$

besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele $U \in \mathcal{U}$ schneidet

(b) jedes $U \in \mathcal{U}$ ist von der Form

$$U = \lambda_U^{-1}(0, 1]$$

für eine Abb. $\lambda_U: B \rightarrow I$.

Ein Faserbündel ist **numerabel**, falls

die Überdeckung $\mathcal{U}$ in Def. 12 numerabel gewählt werden kann.

15. Notiz: Wir können und werden stets annehmen

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U = 1$$

konstant auf B .

(Ersetze sonst jedes λ_U durch $\frac{\lambda_U}{\sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U}$.)

16. Bemerkung:

In guten Räumen (genauer: in parakompakten Hausdorff-Räumen) läßt sich jede Überdeckung zu einer numerablen Überdeckung verfeinern.

Insbesondere sind hier alle Faserbündel numerabel. Beispielsweise sind

- metrisierbare Räume
- CW-Komplexe (s.u.)

gut in diesem Sinne.

17. Satz (Hurewicz-Hübsch)

Sei $\mathcal{U}$ numerable Überdeckung von B .

Eine Abb. $\begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ B \end{array}$ ist genau dann eine Faserung,

wenn die Einschränkung

$$\begin{array}{c} p^{-1}U \\ \downarrow p \\ U \end{array}$$

eine Faserung ist für jedes $U \in \mathcal{U}$.

Korollar (Satz 4):

Jedes numerable Faserbündel ist eine Faserung.

(Beweis:

Nach Satz 17 reicht es zu zeigen: triviale Faserbündel sind Faserungen.

← notwendig von dieser Form

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_0 \\ f \end{pmatrix}} & U \times F \\ \downarrow i_0 & \nearrow & \downarrow \pi_U \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & U \end{array}$$

$\begin{pmatrix} H_t \\ f(y) \end{pmatrix}$

Def.

(y, t)

✓

□

Beweis zu Satz 17 (Skizze):

($\Rightarrow$) folgt aus Stabilität von Faserungen unter Pullbacks:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{p}'U & \longleftrightarrow & E \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ U & \longleftrightarrow & B \end{array}$$

($\Leftarrow$) Nach Vor. und Satz 11 existiert für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Weghebeabb.

$$(\tilde{p}'U)^I \xleftarrow{s_U} U^I \times_{e_U, U, p} (\tilde{p}'U)$$

(Für jedes $[u, v] \subseteq I$ außerdem nach Wahl eines Homöomorphismus $[u, v] \xrightarrow[\cong]{\varphi} I$ auch

$$\begin{aligned} (\tilde{p}'U)^{[u, v]} &\xleftarrow{s_U^{[u, v]}} U^{[u, v]} \times_{e_U, U, p} (\tilde{p}'U) \\ s_U(\beta|_{[u, v]} \circ \tilde{e}', e) \circ \varphi &\leftarrow (\beta, e) \end{aligned}$$

— diese Variation brauchen wir gleich.)

Gesucht ist globale Weghebeabb.

$$\begin{array}{ccc} E^I & \xleftarrow{s} & B^I \times_B E = Ep \\ \begin{array}{c} \textcolor{green}{e} \curvearrowright s(\beta, e) \\ \textcolor{green}{\downarrow} \\ \textcolor{green}{\curvearrowright} \\ \textcolor{green}{\beta} \end{array} & \leftarrow & \begin{array}{c} \bullet e \\ \downarrow \\ \curvearrowright \\ \beta \end{array} \end{array}$$



Die Mengen U^I für $U \in \mathcal{U}$ überdecken nicht B^I .

Schritt 1: Konstruiere Überdeckung $\{W_T\}$ von B^I .

Def. für einen endlichen Tupel

$$T = (U_1, \dots, U_n) \quad \text{mit } U_i \in \mathcal{U}$$

$$W_T := \left\{ \beta \in B^I \mid \beta\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \subseteq U_i \right. \\ \left. \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Die Mengen W_T (für beliebig große T)
überdecken B^I (Lebesgue-Lemma für den kompakten
metrischen Raum I)

[Skript Varghese WS2023/24: Korollar 13.3]



Diese Überdeckung ist nicht lokal endlich.

Immerhin gilt aber für festes $n \in \mathbb{N}$:

| Jedes $\beta \in B^I$ liegt nur in endlich vielen
| W_T mit $|T|=n$.

(Folgt aus lokaler Endlichkeit von $\mathcal{U}$ [...].)

Sogar:

| Jedes $\beta \in B^I$ hat eine offene Umgebung, die
| nur endlich viele W_T schneidet.

Schritt 2: Verkleinere die Mengen W_T so, dass die Überdeckung $\{W_T\}$ von B^I
lokal endlich wird.

Grobe Idee:

$$W_T' := \left\{ \beta \in W_T \mid |T| \text{ minimal für } \beta: \right. \\ \left. \forall S \text{ mit } |S| < |T| \text{ ist } \beta \notin W_S \right\}$$

Konstruiere gleichzeitig aus den gegebenen Abb.

$$\lambda_u: B \longrightarrow I \quad \text{mit} \quad u = \lambda_u^{-1}(0,1]$$

Abb.

$$\omega_u: B^I \longrightarrow I \quad \text{mit} \quad \omega'_T = \omega_T^{-1}(0,1].$$

[...; vgl. May]

Schreibe ab hier wieder ω_T statt ω'_T .

$$\sum_T \omega_T = 1 \quad \text{auf} \quad B^I.$$

Schritt 3: Wegehebeabb. auf ω_T

Def. für $T = (u_1, \dots, u_n)$

$$E^I \xleftarrow{s_T} \omega_T \times_B E$$

durch $s_T(\beta, e) :=$ „Verkettung der gehobenen Wege
 $s_{u_i}(\beta|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]})$ “;

$$\text{genauer: } s_T(\beta, e)(t) := s_{u_i}^{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(e_{i-1}, \beta|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]})(t) \quad \text{für } t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$$

$$\text{mit } e_0 := e,$$

$$e_i := s_{u_i}^{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(e_{i-1}, \beta|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]})\left(\frac{i}{n}\right)$$

[...]

Allgemeiner, für $z: [u, v] \hookrightarrow I$ mit $u \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, $v \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$.

$$E^{[u, v]} \xleftarrow{s_T^{[u, v]}} \overbrace{\omega_T}^{B^{[u, v]}} \times_B E$$

$$s_T(\beta, e)(t) := \begin{cases} s_{u_i}^{[u, \frac{i}{n}]}(e_{i-1}, \beta|_{[u, \frac{i}{n}]})(t) & \text{für } t \in [u, \frac{i}{n}] \\ s_{u_j}^{[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]}(e_{j-1}, \beta|_{[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]})(t) & \text{" " } \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}], \\ & i < j < k \\ s_{u_k}^{[\frac{k}{n}, v]}(e_{k-1}, \beta|_{[\frac{k}{n}, v]})(t) & \end{cases}$$

$$\text{mit } e_{i-1} := e,$$

$$e_i := s_{u_i}^{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(e_{i-1}, \beta|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]})\left(\frac{i}{n}\right)$$

Schritt 4: globale Weghebeabb.,

Wähle totale Ordnung auf der Menge der Tupel T .

Definiere nun

$$E \xleftarrow{s} B^I \times_B E$$

für (β, e) wie folgt:

- Wähle eine Umgebung V von β , die nur endlich viele W_T 's schneidet.

Seien $T_1, \dots, T_n$ die Indizes, für die $V \cap W_T \neq \emptyset$, geordnet entsprechend gewählter Totalordnung.

- Def. $u_i := \sum_{j: j \leq i} \omega_{T_j}(\beta)$

Merke: $u_0 = 0$

$$u_n = 1$$

$$u_i \neq u_{i+1} \iff \beta \in W_{T_i}. \quad (*)$$

Definiere

$$s(\beta, e)(t) := s_{T_i}^{[u_{i-1}, u_i]}(e_{i-1}, \beta|_{[u_{i-1}, u_i]}) \text{ für } t \in [u_{i-1}, u_i]$$

mit $e_0 := e$

$$e_i := s_{T_i}^{\dots}(e_{i-1}, \beta|_{\dots})(u_i).$$

(*) zeigt, dass Def. von $s(\beta, e)$ nicht von Wahl von V abhängt.

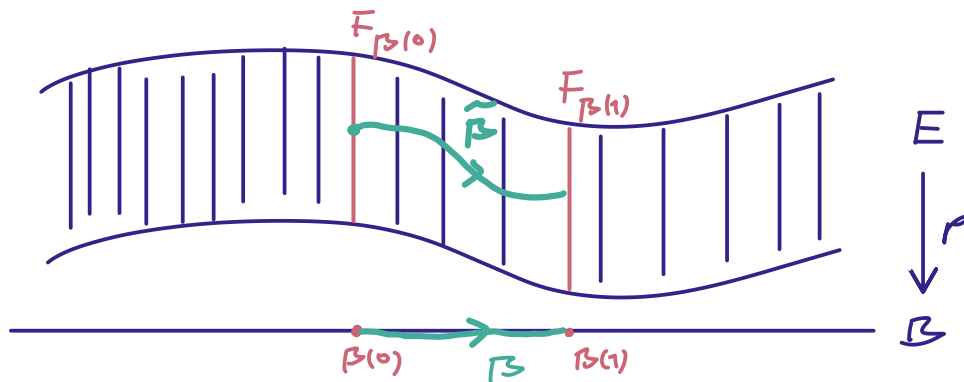
[...]



Fasertransport



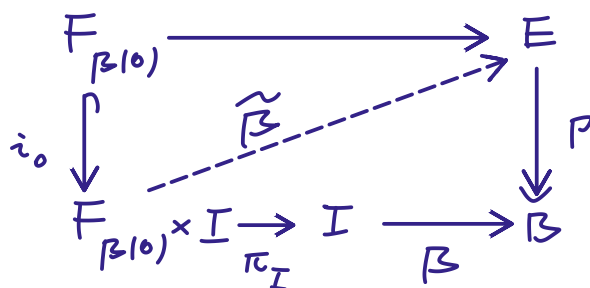
Notation: $F_b := p^{-1}(b)$ für $p: E \rightarrow B$.



18. Def.: $E \twoheadrightarrow B$ Faserung, β Weg in B
 Der Fasertransport entlang β ist die
 (Homotopieklasse der) Abbildung

$$\tau[\beta] := \tilde{\beta}_\tau: F_{\beta(0)} \longrightarrow F_{\beta(1)},$$

wobei $\tilde{\beta}$ die hochgehobene Homotopie in
 folgendem Diagramm ist:

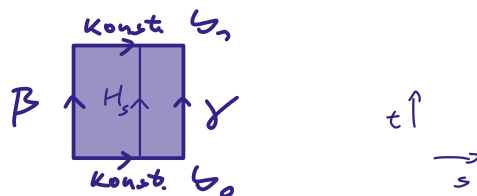


19. Satz: Homotope Wege definieren homotope Fasertransporte.

Beweis:

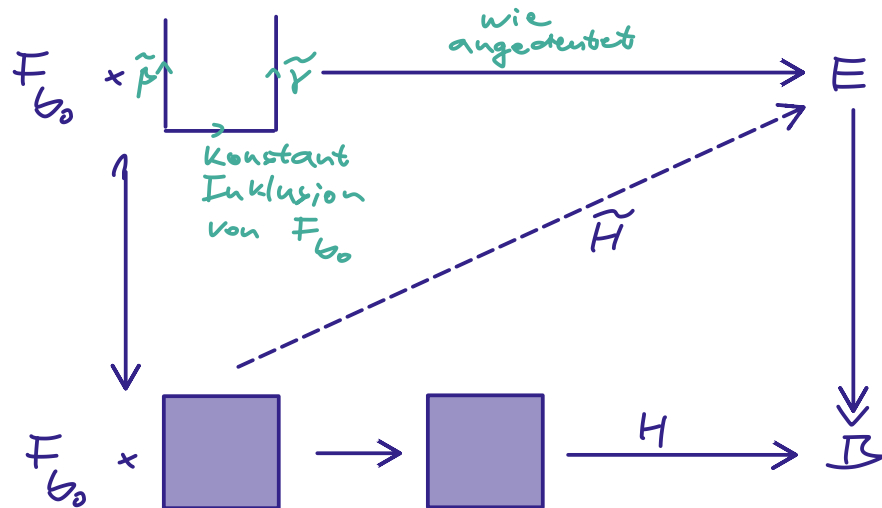
Seien $\beta, \gamma: b_0 \rightsquigarrow b_1$ homotop rel ∂I via

$$H: \begin{matrix} I & \times & I \\ s & & t \end{matrix} \longrightarrow B$$

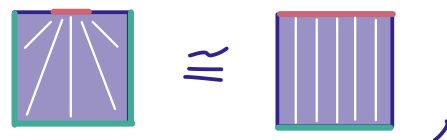


Wähle Hochhebungen $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\gamma}$ wie in Def. 18.

Betrachte:



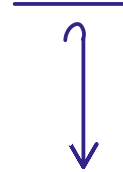
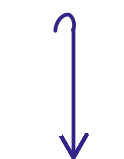
Es gibt einen Homöomorphismus



unter dem



entspricht.



Wir erhalten aus HHE für p also eine Hochhebung $\tilde{H}$.
Einschränkung von $\tilde{H}$ auf obere Quadratkante liefert Abb.

$$F_{b_0} \times I \longrightarrow F_{b_1}$$

die die gesuchte Homotopie $\tilde{\beta}(1) \rightsquigarrow \tilde{\gamma}(1)$ definiert. □

20. Korollar:

Für eine Faserung $p: E \twoheadrightarrow B$ definiert Fasertransport einen Funktor

$$\tau: \pi(B) \xrightarrow{\text{Fundamentalgupoid}} \text{Ho Top}$$

$$\begin{array}{ccc} b_0 & \mapsto & F_{b_0} \\ \downarrow \scriptstyle [\beta] & & \downarrow \scriptstyle \tau[\beta] \\ b_1 & \mapsto & F_{b_1} \end{array}$$

Das heißt:

– Für jeden Weg β in B ist $\tau[\beta]$ wohldef. als Homotopieklasse von Abb. (Satz 19)

– $\tau[c_b] \simeq \text{id}_{F_b}$ (klar aus Def.)
↖ konstanter Weg an b

– $\tau[\beta * \gamma] \simeq \tau[\beta] \circ \tau[\gamma]$ (klar aus Def.)
↖ Verkettung von Wegen

21. Korollar: Alle Fasern einer Faserung über einem wegzusammenhängenden Raum sind homotopieäquivalent.

Beweis: Fasertransport entlang $\beta: b_0 \rightarrow b_1$ definiert Homotopieäquivalenz $\tau[\beta]$ mit Homotopieinversen $\tau[\beta^{-1}]$.

$$\begin{aligned} (\tau[\beta] \circ \tau[\beta^{-1}]) &\underset{s.o.}{\simeq} \tau[\beta * \beta^{-1}] \\ &\underset{1g}{\simeq} \tau[c_{b_1}] \\ &\underset{s.o.}{\simeq} id \end{aligned} \quad)$$

— Funktoren erhalten Isos.



22. Satz: Fasertransport ist verträglich mit Abb. von Faserungen:

Seien $p_A: E_A \rightarrow A$ und $p_B: E_B \rightarrow B$ Faserungen.

① Eine Abb. von Faserungen (G, g) , also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_A & \xrightarrow{G} & E_B \\ p_A \downarrow & & \downarrow p_B \\ A & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

induziert eine natürliche Transformation $G: \tau_A \rightarrow \tau_B \circ g_*$

$$\begin{array}{ccc} \tau(A) & \xrightarrow{\tau_A} & \text{HoTop} \\ & \searrow g_* & \nearrow \tau_B \\ & \tau(B) & \end{array}$$

G

Das heißt, für jeden Weg $\alpha: a_0 \rightsquigarrow a_1$ in A kommutiert

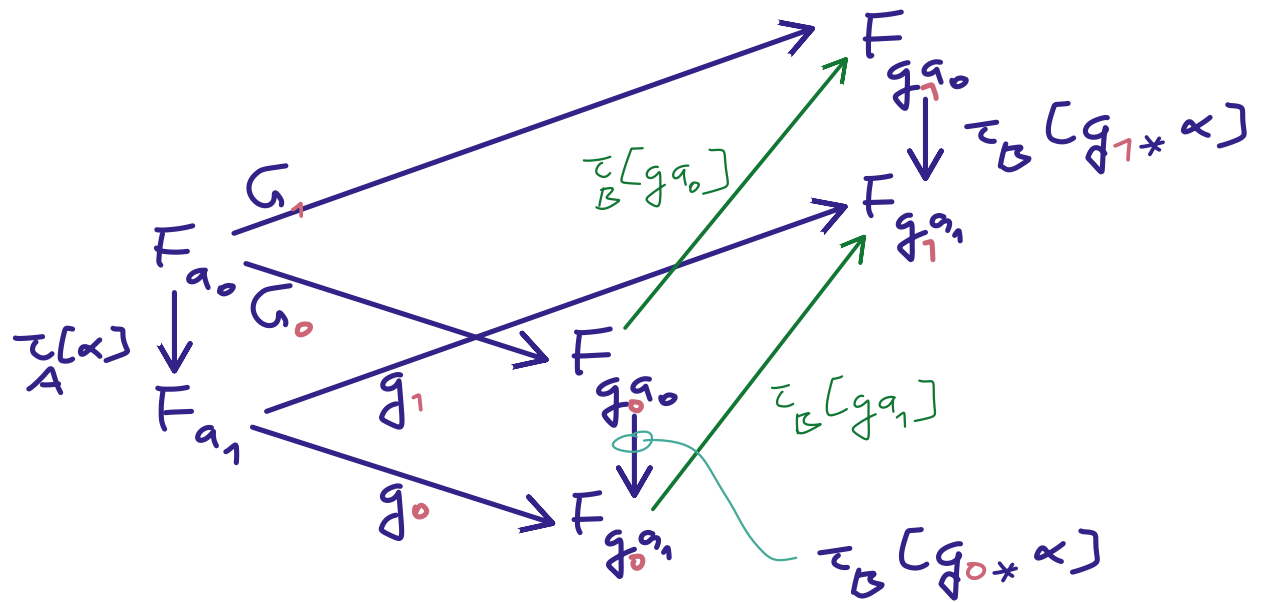
$$\begin{array}{ccc} F_{a_0} & \xrightarrow{G} & F_{g a_0} \\ \tau_A[\alpha] \downarrow & & \downarrow \tau_B[g_* \alpha] \\ F_{a_1} & \xrightarrow{G} & F_{g a_1} \end{array}$$

in HoTop .

② Sind (G_0, g_0) und (G_1, g_1) zwei solche Abb., die über ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_A \times I & \xrightarrow{G} & E_B \\ p_A \times \text{id} \downarrow & & \downarrow p_B \\ A \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

homotop sind, so kommutiert für jeden Weg $\alpha: a_0 \rightsquigarrow a_1$ in A auch folgendes Diagramm:



Beweis: ähnlich zum Beweis von Satz 19. □