

7. Höhere Homotopiegruppen

1. Def.: Für punktierte Räume (X, x) sei
- $$\pi_n(X, x) := [(S^n, *), (X, x)].$$

Das definiert Funktoren:

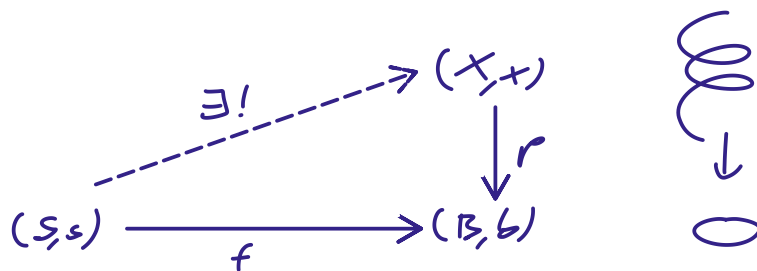
- $\pi_0: \text{HoTop.} \longrightarrow \text{Set.}$
 $(X, x) \longmapsto (\pi_0(X), [x])$
Menge der Weg-zusammenhangskomponenten ausgezeichnete Punkt in dieser Menge: Zusammenhangskomponente von x .
- $\pi_1: \text{HoTop.} \longrightarrow \text{Grp}$ (Fundamentalgruppe)
- $\pi_n: \text{HoTop.} \longrightarrow \text{Ab}$ für $n \geq 2$.

2. Notiz

- (a) $\pi_n(X, x) = 0 \quad \forall n$ falls (X, x) zusammenziehbar
- (b) $\pi_n(X, x) = 0 \quad \forall n > 0$ falls X diskret
- (c) $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(B, b) \quad \forall n \geq 2$ falls $(X, x) \xrightarrow{\text{Überlagerung}} (B, b)$
- (d) $\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n X \times \pi_n Y$

Beweis:

zu c: Ist $p: (X, x) \longrightarrow (B, b)$ Überlagerung, (S, s) zusammenhängend & lokal wegzusammenhängend, so faktorisiert $f: (S, s) \longrightarrow (B, b)$ genau dann durch p , wenn $f_* \pi_1(S, s) \subseteq p_* \pi_1(X, x)$. Ferner ist die Faktorisierung eindeutig festgelegt durch den Basispunkt von x .



Für $(S, s) = (S^n, *)$ mit $n \geq 2$ ist $\pi_1(S, s) = 0$, also existiert immer eindeutige Faktorisierung.

Genauso für $(S, s) = (S^n, *) \cap I_+$. $\square$

3. Beispiele:

$$\pi_n(\mathbb{R}) = 0 \quad \forall n \quad (\text{wegen (a)})$$

$$\pi_n(S^1) = 0 \quad \forall n \geq 2 \quad (\text{wegen (c) und } \mathbb{R})$$

$$\pi_n(S^1 \times S^1) = 0 \quad \forall n \geq 2 \quad (\text{wegen (d) und } S^1).$$

4. Satz (Homotopiesequenz einer Faserung)

Für jede Faserung $p: (E, e) \rightarrow (B, b)$ in Top. mit Faser $F := p^{-1}b \xrightarrow{i} E$ haben wir eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_2 F & \xrightarrow{i_*} & \pi_2 E & \xrightarrow{p_*} & \pi_2 B \rightarrow \circ \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & \pi_1 F & \xrightarrow{i_*} & \pi_1 E & \xrightarrow{p_*} & \pi_1 B \rightarrow \circ \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & \pi_0 F & \xrightarrow{i_*} & \pi_0 E & \xrightarrow{p_*} & \pi_0 B \end{array}$$

Allgemeiner haben wir eine solche exakte Sequenz für jede beliebige Abb. $(E, e) \xrightarrow{p} (B, b)$, sofern wir die Faser F durch die Homotopiefaser $F.p$ ersetzen.

Beweis: Wähle in Satz 6.23 $T := S^\circ$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow [S^\circ, \Omega E] \rightarrow [S^\circ, \Omega B] & \xrightarrow{i_*} & [S^\circ, F.p] & \xrightarrow{\pi_*} & [S^\circ, E] & \xrightarrow{P_*} & [S^\circ, B] \\ & \parallel & \underbrace{\pi_0(F.p)} & & \underbrace{\pi_0 E} & & \underbrace{\pi_0 B} \\ & [S^\circ, B] & & & & & \\ & \parallel & & & & & \\ & [S^1, B] & & & & & \\ & \underbrace{\pi_1 B} & & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Beachte } [S^\circ, \Omega^n -] &\cong [\Sigma^n S^\circ, -] \\ &= [S^n, -] \\ &= \pi_n(-) \end{aligned}$$

Das beweist die allgemeine Aussage.

Falls p Faserung ist, haben wir Homotopieäquivalenz

$$\begin{aligned} j: F &\xrightarrow{\cong} F.p \\ x &\mapsto (c_b, x) \end{aligned}$$

(Korollar 6.21), und

$$\begin{array}{ccc} [S^n, F.p] & \xrightarrow{\pi_*} & [S^n, E] \\ j \uparrow \cong & \nearrow i_* & \\ [S^n, F] & & \end{array} \quad \text{kommutiert}$$

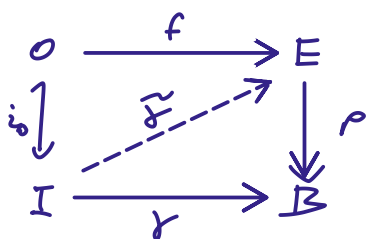
(denn

$$\begin{array}{ccc} F.p & \xrightarrow{\pi} & E \\ j \uparrow \cong & \nearrow i & \\ F & & \end{array} \quad \text{kommutiert}).$$

□

Für eine Faserung $(E, e) \xrightarrow{p} (B, b)$ operiert $\pi_1(B, b)$ auf $\pi_0(F)$ (angepasst als unpunktete Menge) durch Weghochhebung:

Zu $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ und $[f] \in \pi_0(F)$ existiert ein hochgehobener Weg $\tilde{\gamma}$ in E mit $\tilde{\gamma}(0) = f \in F$ und $\tilde{\gamma}(1) \in F$.



Definiere $[\gamma] \cdot [f] = [\tilde{\gamma}(1)] \in \pi_0(F)$.

Prüfe, dass $[\gamma] \cdot [f]$ nur von Klasse $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ und Komponente $[f] \in \pi_0(F)$ abhängt.

Nachtrag
13.12.2024

Bemerkung:

Können $[\gamma] \cdot [f]$ auch über Fasertransport definieren:

$$[\gamma] \in \pi_1(B, b)$$

$$\text{definiert } \tau[\gamma] \in [F, F]$$

$$\text{induziert } \tau[\gamma]_* : \pi_0 F \longrightarrow \pi_0 F,$$

und

$$[\gamma] \cdot [f] = \tau[\gamma]_*([f])$$

Das ist eigentlich hier unnötig aufwendig, aber nach der Vorarbeit in S.19ff sieht es einfacher aus.

Satz 5: Für eine punktierte Faserung
 $p: (E, e) \twoheadrightarrow (B, b)$

mit Faser F ist die Abbildung

$$\partial: \pi_1(B, b) \longrightarrow \pi_0 F$$

in Satz 4 gegeben durch

$$[\gamma] \longmapsto [\gamma] \cdot [e]$$

Beweis:

Wähle $\tilde{\gamma}$ wie oben, also $[\gamma] \cdot [e] = [\tilde{\gamma}(1)] \in \pi_0(F)$.

Beweis von Satz 4 zeigt: ∂ ist induziert von der Komposition

$$\begin{array}{ccc} \Omega_*(B, b) & \xrightarrow{i_*} & F.p \xleftarrow{j_*} F = p^*b \\ \gamma & \mapsto & (\gamma, e) \\ & & (c_b, x) \longleftarrow x \end{array}$$

Da j_* Bijektion ist, r.z.z.

$$i_*[\gamma] = j_*[\tilde{\gamma}(1)] \quad \text{in } \pi_0(F.p)$$

$$\text{also } (\gamma, e) = (c_b, \tilde{\gamma}(1)) \quad \text{in } \pi_0(F.p)$$

Reicht, Weg $\beta: (\gamma, e) \rightsquigarrow (c_b, \tilde{\gamma}(1))$ in $F.p$ anzugeben:

$$\beta(t) := (" \gamma|_{[t,1]} ", \tilde{\gamma}(t))$$

□

Satz 6: Für eine punktierte Faserung

$$p: (E, e) \twoheadrightarrow (B, b)$$

mit Faser $p^{-1}(b) = F \xleftarrow{i} E$ sind die Fasern der Abbildung

$$\pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E)$$

die Bahnen der $\pi_1(B, b)$ -Wirkung auf $\pi_0(F)$.

verallgemeinert 13.12.2024

Beweis:

Für die Faser des Basispunkts e folgt das aus Satz 4 und Satz 5:

$$i_*^{-1}[e] = \partial(\pi_1(B, b)) = \pi_1(B, b).[e]$$

↑
Exaktheit
in Satz 4

Satz 5

Es lässt sich aber auch leicht direkt – und dann für beliebige Komponente $[f] \in \pi_0(F)$ zeigen:

$$i_*^{-1}[f] = \pi_1(B, b).[f] \quad \text{für alle } f \in F:$$

($\subseteq$) Ist $f' \in F$ mit $[f'] \in i_*^{-1}[f]$,
also $[f'] = [f]$ in $\pi_0(E)$,

so $\exists$ Weg $\tilde{\gamma}: f \rightsquigarrow f'$ in E , und
 $[p\tilde{\gamma}].[f] = [f']$.

($\supseteq$) Ist $[f'] \in \pi_1(B, b).[f]$,

so $\exists$ Schritte γ an b in B und Hochhebung

$$\tilde{\gamma}: f \rightsquigarrow \tilde{\gamma}(1) \text{ in } E$$

mit $[f'] = [\tilde{\gamma}(1)]$ in $\pi_0(F)$.

In $\pi_0(E)$ gilt also

$$[f'] = [\tilde{\gamma}(1)] = [\tilde{\gamma}(0)] = [f],$$

↑
 $\tilde{\gamma}$ Weg in E

also $[f'] \in i_*^{-1}[f]$.



7 Def. und Satz:

Für einen Teilraum $(A, x) \hookrightarrow^i (X, x)$ ist

$$\pi_n(X, A, x) := [S^{n-1}, F_i] \quad (a)$$

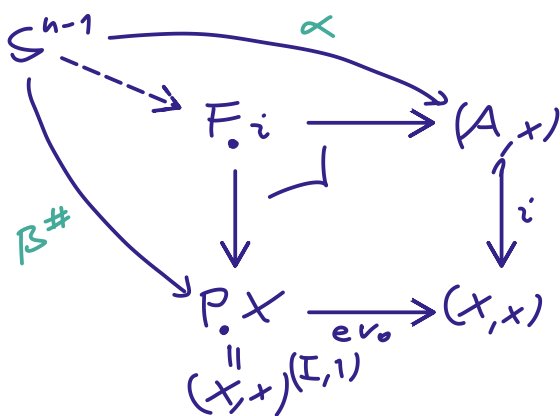
$$\cong [(D^n, S^{n-1}, *), (X, A, x)] \quad (b)$$

Homotopieklassen von Tripeln,
analog zu Paaren (§4, Anhang II)

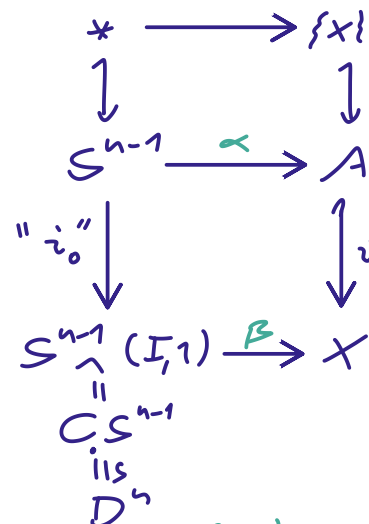
für $n \geq 1$.

$$(F_i = \{ \gamma: I \rightarrow X \mid \gamma(0) \in A, \gamma(1) = x \})$$

Beweis der Äquivalenz von (a) & (b):



(a)



(b)

Diagramme der Form (a) und (b) sind äquivalent (Exponentialgesetz). Das zeigt:

$$\text{Top.}(S^{n-1}, F_i) \cong \text{Top Tripel}((D^n, S^{n-1}, *), (X, A, x)).$$

Argument gilt genauso, wenn wir S^{n-1} durch $S^{n-1} I_+$ ersetzen. Also entsprechen sich auch die Homotopen und somit die Homotopieklassen. $\square$

Homotopiegruppen von S^n

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	Beispiel 3
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$ $\mathbb{S}$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{S}$	(Korollar 11)
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{S}$	
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$			
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$		

Einführung in die Top.
jetzt
später (§9)

$[S^i, S^n]$.

10. Satz: $\pi_i(S^n) = 0 \quad \forall i < n$

Beweisskizze:

Jede Abb. $S^i \rightarrow S^n$, die nicht surjektiv ist, ist homotop zu einer konstanten Abb., denn sie faktorisiert durch $S^n \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^n \simeq *$.

Es reicht also zu zeigen:

Für $i < n$ ist jede (stetige) Abb. $S^i \rightarrow S^n$ homotop zu einer nicht-surjektiven Abb.

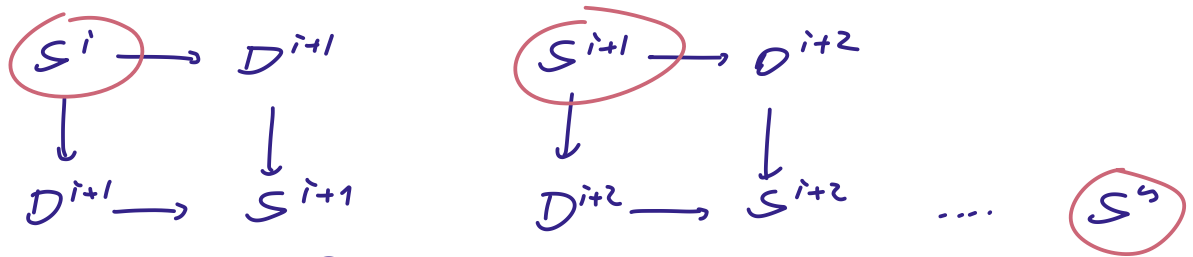
~~Argument 1:~~ Es gibt gar keine surjektiven (stetigen) Abb. $S^i \rightarrow S^n$ für $i < n$.

falsch! $\rightarrow$ Peano-Kurven

~~Argument 2:~~ „zelluläre Approximation“

Wir werden sehen:

Können S^n aus S^i konstruieren, indem wir höher-dimensionale „Zellen“ D^j ($j > i$) anheften.



Daraus wird folgen:

Jede Abb. $S^i \longrightarrow S^n$ ist homotop
zu einer Abb. mit Bild in S^i .

— zirkulär! Wir werden Satz 10 brauchen,
um zelluläre Approximation zu
beweisen

Argument 3: Differentialgeometrie

- Jede stetige Abb. zwischen glatten
Mannigfaltigkeiten ist homotop zu einer glatten
Abb.
- Eine glatte Abb. von Mannigfaltigkeiten
 $M \longrightarrow N$ mit $\dim M < \dim N$ ist niemals
surjektiv, denn es gilt der

Satz von SARD:

Die kritischen Werte einer glatten Abb.
 $M \longrightarrow N$ haben Maß Null.

(kritischer Wert von $f: M \longrightarrow N$

$\coloneqq$ Bild eines Punktes $m \in M$, für den

$$\begin{array}{ccccc}
 T_m f: T_m M & \longrightarrow & T_{f(m)} N & \text{nicht surjektiv ist.} & \\
 \uparrow & \parallel & \parallel & & \\
 \text{lineare Abb.} & \mathbb{R}^{\dim M} & \mathbb{R}^{\dim N} & &
 \end{array}$$

Ist $\dim M < \dim N$, so sind alle Bildpunkte
kritisch. Also sagt SARD: $f(M)$ hat Maß
Null in N .) □

11. Korollar: $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$

und $\pi_i(S^2) \cong \pi_i(S^3) \quad \forall i \geq 3.$

Beweis: Betrachte das Hopf-Bündel

(Blatt 5 Aufgabe 2d)

$$\begin{array}{ccc} S^1 \longrightarrow S^3 (= \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) & \text{allgemein:} & S^1 \longrightarrow S^{2n-1} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^2 (\cong \mathbb{C}P^1) & & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

induziert

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{i_*} & \pi_3 S^3 & \xrightarrow{p_*} & \pi_3 S^2 \rightarrow 0 \\ & \searrow & & & & & \\ & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \pi_2 S^2 \rightarrow 0 \\ & \searrow & & & & & \\ & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \pi_1 S^2 \rightarrow 0 \\ & \searrow & & & & & \\ & \rightarrow & * & \xrightarrow{i_*} & * & \xrightarrow{p_*} & * \end{array}$$

Benutze nun Exaktheit.

□



$\pi_i(S^n)$ für $i > n$ kompliziert

⚠ einfach-zshgd. kompakte Mannigfaltigkeit M ,
für die alle $\pi_n M$ bekannt sind, außer $*$.

$\pi_n(\text{colim})$

Die Räume, für die wir alle π_n kennen, sind in der Regel „unendlich-dimensional“, z. B.

$$S^\infty := \text{colim}_j (S^0 \hookrightarrow S^1 \hookrightarrow S^2 \hookrightarrow \dots)$$

12. Satz: Für eine Sequenz punktierter abgeschlossener Teilräume $(X_1, x) \hookrightarrow (X_2, x) \hookrightarrow (X_3, x) \hookrightarrow \dots$ ist

$$\pi_n(\text{colim}_i X_i) \cong \text{colim}_i \pi_n(X_i)$$

Bsp.: $\pi_n(S^\infty) = 0 \quad \forall n$

13. Lemma: In der Kategorie aller topologischen Räume gilt:

Sei $X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 \hookrightarrow \dots$ Sequenz beliebiger Teilräume, die alle T_1 sind (d.h. Punkte in X_i sind abgeschlossen). Dann faktorisiert für jeden kompakten Raum K jede Abb. $K \longrightarrow \text{colim}_i X_i$ durch ein X_i .

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \text{colim}_i X_i \\ & \searrow \exists & \nearrow \\ & X_i & \end{array}$$

Beweis:

Sei $f: K \longrightarrow \text{colim}_i X_i$. Falls kein i mit $f(K) \subseteq X_i$, so existiert Folge $f_1 < f_2 < f_3 < \dots$

$$f(K) \cap X_{f_i} \subsetneq f(K) \cap X_{f_{i+1}}$$

Wähle Punkte

$$s_i \in f(K) \cap (X_{f_i} \setminus X_{f_{i-1}})$$

$$S := \{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

Es ist $S \cap X_i$ endlich für jedes i , also

$S \cap X_i$ abgeschlossen in X_i für jedes i ,

also S abgeschlossen in $\text{colim}_i X_i$ (nach Def. der colim-Topologie).

Dasselbe argument zeigt: jede Teilmenge von S ist abgeschlossen in $\text{colim}_i X_i$. Also ist S diskreter
(a) Unterraum von $\text{colim}_i X_i$.

Andererseits ist $S \subseteq f(K)$ abgeschlossen,

und $f(K)$ ist kompakt, also ist S kompakt.
(b)

Aus (a) & (b) folgt: S ist endlich  □

14. Lemma: In unserer Kategorie Top gilt:

Sei $X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 \hookrightarrow \dots$ Sequenz abgeschlossener
Teilräume, K kompakt.

(a) Jede Abb. $K \rightarrow \text{colim}_i X_i$ faktorisiert durch ein X_i .

(b) $\text{Top}(K, \text{colim}_i X_i) \cong \text{colim}_i \text{Top}(K, X_i)$

(c) $[K, \text{colim}_i X_i] \cong \text{colim}_i [K, X_i]$

Analoge Aussagen gelten in Top .

Beweis:

a: schwach-H1-Räume sind T_1

(denn jeder Punkt ist ein Retrakt, und Retrakte sind abgeschlossen nach Lemma ?)

Außerdem ist der Top -Kolimes abgeschlossener Teilräume der gewöhnliche Kolimes nach Lemma 3.10 & Korollar 3.12.

b: Betrachte die kanonische Abb.

$$\begin{aligned} \text{colim}_i \text{Top}(K, X_i) &\longrightarrow \text{Top}(K, \text{colim}_i X_i) \\ [K \xrightarrow{f} X_i] &\longmapsto K \xrightarrow{f} X_i \hookrightarrow \text{colim}_i X_i \end{aligned}$$

Teil (a) zeigt, dass sie surjektiv ist.

Injektivität: ohnehin klar:

Seien $[K \xrightarrow{f} X_i]$ und $[K \xrightarrow{g} X_j]$

derart, dass

$$K \xrightarrow{f} X_i \hookrightarrow \text{colim}_i X_i = K \xrightarrow{g} X_j \hookrightarrow \text{colim}_i X_i$$

Wähle ein $k \gg i, j$. Dann ist

$$K \xrightarrow{f} X_i \hookrightarrow X_k = K \xrightarrow{g} X_j \hookrightarrow X_k,$$

denn $X_k \hookrightarrow \text{colim}_i X_i$ ist injektiv.

Also ist $[K \xrightarrow{f} X_i] = [K \xrightarrow{g} X_j]$ nach

Konstruktion des Kolimes in Set.

c: Ist $(K \xrightarrow{f} X_i) \simeq (K \xrightarrow{g} X_j)$, so auch

$$K \xrightarrow{f} X_i \hookrightarrow \text{colim}_i X_i \simeq K \xrightarrow{g} X_j \hookrightarrow \text{colim}_i X_i$$

Also induziert Abb. oben ein Abb.

$$\text{colim}_i [K, X_i] \longrightarrow [K, \text{colim}_i X_i]$$

Diese ist (erst recht) surjektiv.

Injektivität:

$$\text{Ist } K \xrightarrow{f} X_i \hookrightarrow \text{colim}_i X_i \simeq K \xrightarrow{g} X_j \hookrightarrow \text{colim}_i X_i$$

so faktorisiert eine Homotopie zwischen

ihnen nach (a) durch ein X_k

(denn $K \times I$ ist kompakt).

Punktierter Fall analog. □

Beweis von Satz 12: Wähle in der punktierten Version von Lemma 14 (c) $K := S^n$. □

(Un)abhängigkeit von Basispunktwahl

15. Satz: Jeder Weg $\gamma: x \rightsquigarrow x'$ in X induziert $n \geq 1$ einen Gruppenisomorphismus

$$\pi_n(X, x) \xrightarrow{\tau[\gamma]} \pi_n(X, x'),$$

der nur von der Homotopieklasse von γ abhängt, und der natürlich ist in folgendem Sinne:

(a) Für festes $g: X \rightarrow Y$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x) & \xrightarrow{g_*} & \pi_n(Y, g_*x) \\ \tau[\gamma] \downarrow \cong & & \cong \downarrow \tau[g_*\gamma] \\ \pi_n(X, x') & \xrightarrow{g_*} & \pi_n(Y, g_*x') \end{array}$$

(b) Für jede Homotopie $g: X \times I \rightarrow Y$ kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & & & \pi_n(Y, g_1^*x) & \\ & & & \cong \downarrow \tau[g_1\gamma] & \\ \pi_n(X, x) & \xrightarrow{g_{1*}} & \pi_n(Y, g_1^*x) & & \\ & \nearrow g_{1*} & \nearrow \tau[g_1x] & & \\ & \pi_n(X, x) & \xrightarrow{g_{1*}} & \pi_n(Y, g_1^*x') & \\ & \nearrow g_{1*} & \nearrow \tau[g_1x'] & & \\ \pi_n(X, x') & \xrightarrow{g_{0*}} & \pi_n(Y, g_0^*x) & \xrightarrow{g_{1*}} & \pi_n(Y, g_1^*x') \\ & \nearrow g_{0*} & \nearrow \tau[g_0x] & & \\ & \pi_n(X, x') & \xrightarrow{g_{0*}} & \pi_n(Y, g_0^*x') & \end{array}$$

Definition von $\tau[\gamma]$: $\pi_n(X, x) = \pi_0((X, x)^{(S^n, *)})$

Die Kofaserung $* \rightarrow S^n$ induziert nach Satz 5.7

eine Faserung $X^* \leftarrow X^{S^n}$ in Top

mit Faser $ev_*^{-1}(x) = (X, x)^{(S^n, *)}$. Fasertransport entlang γ induziert also eine Homotopieäquivalenz

$$(X, x) \xrightarrow{\tau(x)} (X, x') \quad (S^n, *)$$

und somit nach Anwendung von π_0 eine Bijektion

$$\pi_n(X, x) \xrightarrow[\tau(x)]{\cong} \pi_n(X, x')$$

Alle Behauptungen des Satzes folgen aus Korollar 5.20 und Satz 5.22, bis auf „ $\tau(x)$ ist Gruppenhomomorphismus“.

Für letztere Aussage benutzen wir:

Lemma 16: Sei $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ der Äquator.
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$

Die Einschnürungsabb. (engl. "pinch map") ist die kanonische Abb.

$$S^n \xrightarrow{p} S^n / S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$$

Die Addition auf $\pi_n(X, x)$ ($n \geq 1$) ist gegeben durch

$$[S^n \xrightarrow{f} X] + [S^n \xrightarrow{g} X] = [S^n \xrightarrow{p} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X]$$

Beweis durch Nachrechnen:

$$\boxed{f} + \boxed{g} = \boxed{\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}}$$

entspricht

$$\text{Sphere } f + \text{Sphere } g = \text{Pinched Sphere } (f \vee g)$$

□

Beweis zu Satz 15 ($\tau[\mathcal{F}]$ ist Gruppenhomomorphismus)

Die Einschränkung Abb. p definiert Abb. zwischen Fasern

$$\begin{array}{ccc} X^{s^n} & \xleftarrow{p^*} & X^{s^n \circ s^n} \cong X^{s^n} \times X^{s^n} \\ \downarrow \text{ev}_* & & \downarrow \text{ev}_* \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

Einschränkung auf Fasern über $x \in X$ liefert:

$$(X, x)^{(s^n, *)} \xleftarrow{p^*} (X, x)^{(s^n, *)} \times (X, x)^{(s^n, *)}$$

Nach Anwenden von π_0 erhalten wir nach Lemma 16

$$\pi_n(X, x) \xleftarrow{+} \pi_n(X, x) \times \pi_n(X, x)$$

Satz 5.22 (1) (Natürlichkeit von Fasentransport) zeigt:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x) & \xleftarrow{+} & \pi_n(X, x) \times \pi_n(X, x) \\ \downarrow \tau[\mathcal{F}] & & \downarrow \tau[\mathcal{F}] \times \tau[\mathcal{F}] \\ \pi_n(X, x') & \xleftarrow{+} & \pi_n(X, x') \times \pi_n(X, x') \end{array}$$

kommutiert.



17. Korollar (aus Satz 15):

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ operiert auf $\pi_n(X, x)$ durch Gruppenhomomorphismen.

18. Satz:

Für jeden wohlpunktierten wegzusammenhängenden Raum (X, x) induziert die vergessliche Abb.

$$\begin{array}{c} \pi_n(X, x) \longrightarrow [S^n, X] \\ \parallel \\ [(\overset{!}{S^n}, x), (X, x)]. \end{array}$$

eine Bijektion

$$\pi_n(X, x) / \pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} [S^n, X]$$

Insbesondere gilt für einfach-zusammenhängenden wohlpunktierten Raum (X, x) :

$$\pi_n(X, x) \cong [S^n, X].$$

Beweis:

Betrachte wieder Faserung

$$\begin{array}{ccc} (X, x)^{(S^n, *)} & \longrightarrow & X^{S^n} \\ & & \downarrow \text{ev}_* \\ & & X \end{array} \quad \text{in Top}$$

Nach Bemerkung 6.18 ist

$$\begin{array}{ccc} (X, x)^{(S^n, *)} & \longrightarrow & (X^{S^n}, c_x) \\ & & \downarrow \text{ev}_* \\ & & (X, x) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{wohlpunktisiert} \\ \text{nach} \\ \text{[Strom, Fact 5.92]} \\ \\ \leftarrow \text{wohlpunktisiert} \\ \text{nach} \\ \text{Voraussetzung} \end{array}$$

eine punktierte Faserung.

Die lange exakte Homotopiesequenz endet in:

$$\pi_0(X, x) \xrightarrow{(S^n, *)} \pi_0(X^{S^n}, c_x) \longrightarrow \pi_0(X, x)$$

$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $\pi_n(X, x) \quad [S^n, x] \quad *$

Da Sequenz exakt ist, ist i_* surjektiv.

Fasern von i_* sind nach Satz 7.6

sind $\pi_1(X, x)$ -Bahnen.

□

Schwache Äquivalenzen

19. Def.: Eine Abb. $f: X \longrightarrow Y$ in Top ist eine **schwache Äquivalenz**, falls

$$f_*: \pi_n(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, fx)$$

für alle $n \geq 0$ und alle $x \in X$ ein Isomorphismus ist.

Sie ist eine **n -Äquivalenz**, falls zumindest gilt:

$f_*: \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, fx)$ surjektiv
und $f_*: \pi_q(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_q(Y, fx)$
Isomorphismus für alle $q < n$
und alle $x \in X$.

Korrektur 08.01.2024

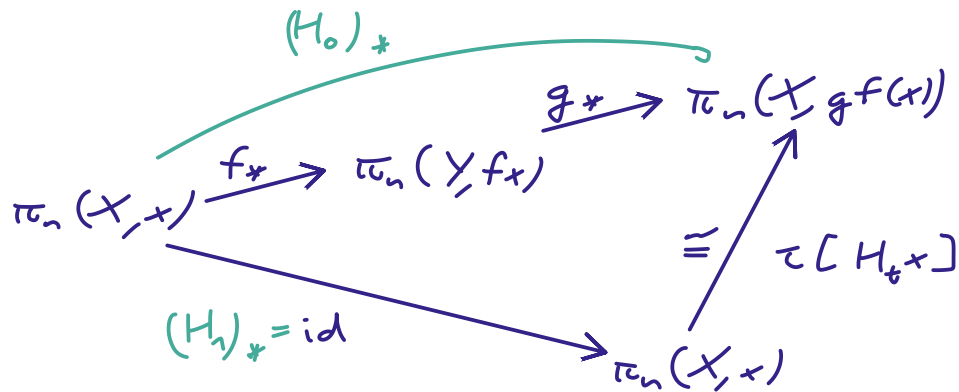
Eine Abb. $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ in Top .
ist eine schwache Äquivalenz / n -Äquivalenz,
falls $f: X \longrightarrow Y$ eine solche Äquivalenz
ist.

20. Satz: Jede Homotopieäquivalenz (in Top oder Top_*) ist eine schwache Äquivalenz.

Beweis:

Es reicht, Aussage für Homotopieäquivalenz $f: X \longrightarrow Y$
in Top zu zeigen. Sei dazu g ein Homotopie-
Inverses, $H: X \times I \longrightarrow X$ Homotopie $\text{id} \rightsquigarrow g \circ f$.

Satz 15 zeigt, dass folgendes Dreieck kommutiert:



Also ist f_* injektiv $\forall x \in X$,
 g_* surjektiv $\forall y \in f(X)$.

Analog: g_* injektiv $\forall x \in Y$,
 f_* surjektiv $\forall x \in g(Y)$.

Inbesondere folgt:

g_* bijektiv $\forall y \in f(X)$,

somit folgt aus obigem Diagramm:

f_* bijektiv $\forall x \in X$.

