

8. Zellkomplexe

⊕ Jeder Raum ist schwach äquivalent zu einem Zellkomplex.

⊕ Für Zellkomplexe X, Y gilt:

$f: X \rightarrow Y$ Homotopie-äquivalenz \Leftrightarrow schwache Äquivalenz

1. Def A: Ein Zellkomplex / CW-Komplex ist ein Raum X zusammen mit einer Filtrierung durch Unterräume

$$\emptyset \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq X^3 \subseteq \dots,$$

die Skelette von X genannt werden, und Anheftabbildungen

$$j_i: S^{d-1} \longrightarrow X^{d-1}, \quad i \in I^d$$

derart, dass gilt:

(1) Das d -Skelett X^d geht aus dem $(d-1)$ -Skelett X^{d-1} durch Anheften von d -Bällen D^d entlang der j_i hervor:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{I^d} S^{d-1} & \longrightarrow & \coprod_{I^d} D^d \\ \downarrow \coprod_{i \in I^d} j_i & & \downarrow \\ X^{d-1} & \longrightarrow & X^d \end{array}$$

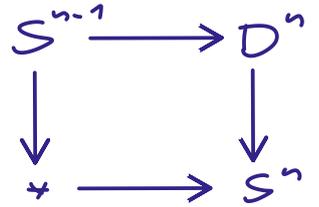
$$X^{-1} = \emptyset, \quad X^0 = \coprod_{I^0} D^0$$

$$(2) X = \operatorname{colim}_{\rightarrow d} X^d$$

2. Beispiele

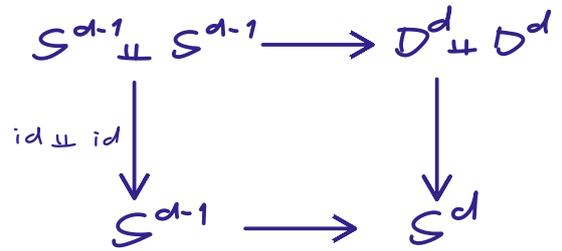
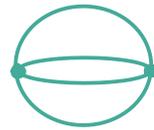
S^n

z. B.: 1 0-Zelle
1 n-Zelle



z. B. 2 d-Zellen

für jedes $d \in \{0, \dots, n\}$



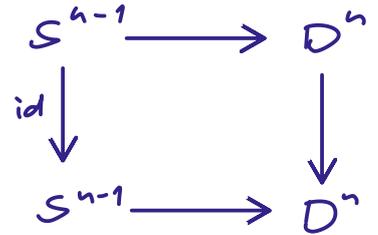
S^∞

$$S^\infty = \text{colim}_n S^n;$$

verallgemeinere zweites Bsp. zu S^n

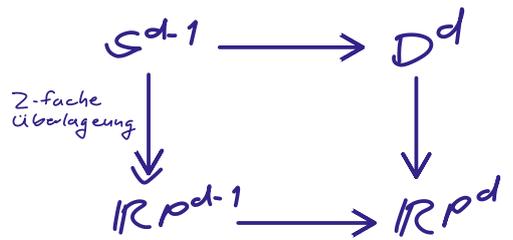
D^n

wie S^{n-1}
plus 1 n-Zelle



$\mathbb{R}P^n$

z. B. genau 1 d-Zelle
 $\forall d \in \{0, \dots, n\}$

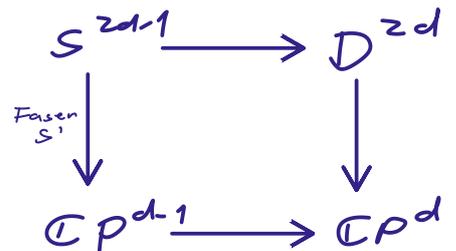


$$\mathbb{R}P^1 \cong S^1$$



$\mathbb{C}P^n$

z. B. genau 1 d-Zelle
 $\forall d \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$



\mathbb{R}

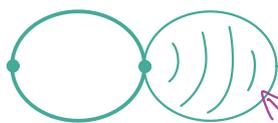
∞ viele 0-Zellen
 ∞ viele 1-Zellen



~~X~~  $\begin{matrix} 1 & 0\text{-Zelle} \\ 2 & 1\text{-Zellen} \end{matrix}$ keine Zellstruktur

✓  $\begin{matrix} 1 & 0\text{-Zelle} \\ 2 & 1\text{-Zellen} \end{matrix}$

✓  $\begin{matrix} 2 & 0\text{-Zellen} \\ 3 & 1\text{-Zellen} \end{matrix}$

✓  $\begin{matrix} 2 & 0\text{-Zellen} \\ 2 & 1\text{-Zellen} \\ 1 & 2\text{-Zelle} \end{matrix}$
 2-Zelle

✓  $\begin{matrix} 1 & 0\text{-Zellen} \\ 1 & 1\text{-Zellen} \\ 1 & 2\text{-Zelle} \end{matrix}$

~~X~~  Jeder Punkt auf S^1 eine 0-Zelle
keine 1-Zelle
eine 2-Zelle

(in A: \nexists geeignete Anheftabb.)

(in B: Endlichkeit in (2) nicht gegeben)

3. Def B: Ein Zellkomplex / CW-Komplex ist ein Hausdorff-Raum X zusammen mit einer Zerlegung

$$X = \bigcup_{d \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{i \in I^d} X_i^d$$

in disjunkte Teilmengen X_i^d , die offenen Zellen von X , und zusammen mit charakteristischen Abb.

$$j_i: D^d \longrightarrow X$$

für jedes $i \in I^d$ derart, dass gilt:

(1) $j_i | \mathring{D}^d$ ist injektiv mit Bild X_i^d .

(Es folgt: $j_i: \mathring{D}^d \xrightarrow{\cong} X_i^d$ Homöomorphismus

$j_i: D^d \longrightarrow \overline{X_i^d}$ Identifizierung.)

Beachte: $\mathring{D}^0 = D^0$ — wir betrachten D^0 als Unterraum von $\mathbb{R}^0 = *$

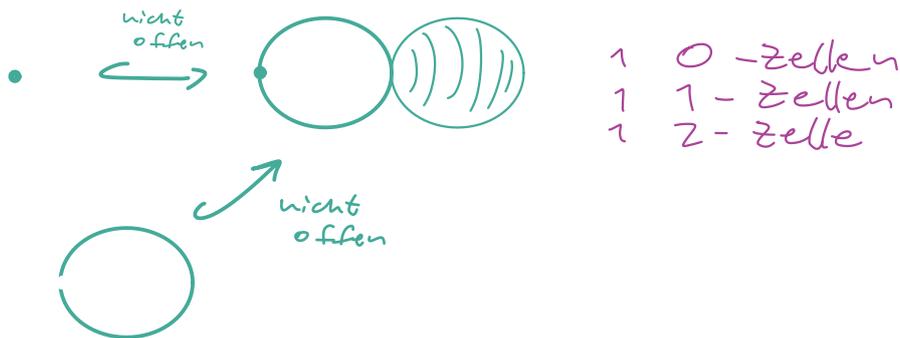
(2) $j_i(\partial D^d)$ ist in Vereinigung von endlich vielen offenen Zellen kleinerer Dimension (also $< d$) enthalten.

(3) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap \overline{X_i^d}$ abgeschlossen ist in $\overline{X_i^d}$ für alle d , alle $i \in I^d$.



Die offenen Zellen X_i^d sind nicht notwendig offen in X .

z.B.

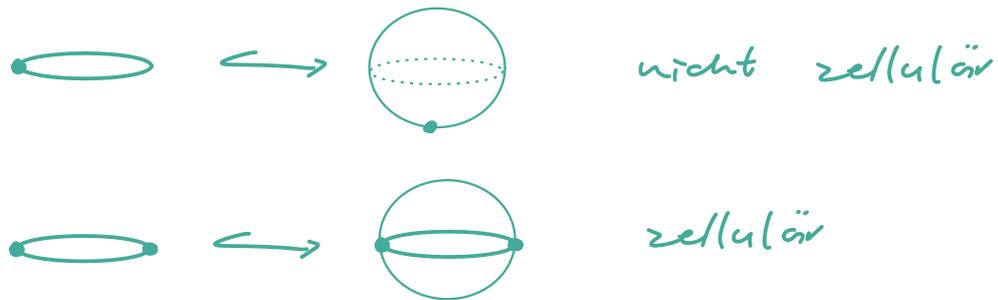


Def. A, Fortsetzung:

Ein relativer Zellkomplex (X, A) ist analog definiert, außer dass wir für $X^{-1} = A$ einen beliebigen Raum aus Top zulassen.

Eine Abbildung zwischen Zellkomplexen
 $f: X \rightarrow Y$ ist **zellulär** (bezüglich der
 gewählten Zellstrukturen auf X und Y), falls
 $f(X^d) \subseteq Y^d$.

z. B. $f: S^1 \hookrightarrow S^2$ als Äquator.



Nach Lemma 3.10 & Korollar 3.12 macht es
 in Def. A keinen Unterschied, ob wir die
 Pushouts und den colim in Top oder in
 der Kategorie aller topologischen Räume bilden.

Wir werden sehen: Def. A & B sind äquivalent.

Def. der charakteristischen Abb. mittels Def. A:

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{d-1} & \longrightarrow & D^d & & \\
 \downarrow j_i' & & \downarrow & \searrow j_i & \\
 X^{d-1} & \longrightarrow & X^d & \hookrightarrow & X
 \end{array}$$

Die offenen Zellen sind also $X_i^d := j_i(D^d)$,
 und man sieht leicht $X = \bigcup_d \bigcup_i X_i^d$

CW steht für C - closure finite (Def. B (2))
 W - weak topology (Def. B (3) / A (2))

4. Def.: Ein Zellkomplex ist

endlich \Leftrightarrow besteht aus endlich vielen Zellen

n -dimensional $\Leftrightarrow I_d = \emptyset \quad \forall d > n, I_n \neq \emptyset$

Ein Unterkomplex eines Zellkomplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum $A \subseteq X$, der eine Vereinigung offener Zellen von X ist, mit der induzierten Zellstruktur. [Hatcher, Appendix, vor Proposition A.1]



[Präzisierung & Ergänzung 07.07.2025]

5. Satz (Eigenschaften von Zellkomplexen)

(a) Die Inklusionen der Skelette

$$X^d \hookrightarrow X^{d+1}$$

und $X^d \hookrightarrow X$

(und $A \hookrightarrow X$ im relativen Fall)

sind Kohomologien.

(b) Zellkomplexe sind $T_4 := \perp$ normal und Hausdorffsch

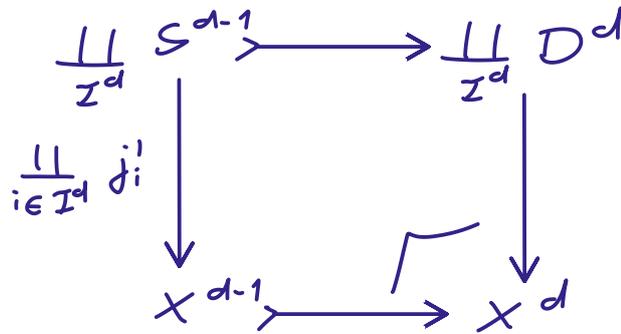
(normal: je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen lassen sich durch Umgebungen trennen)

(c) Zellkomplexe sind genau dann kompakt, wenn sie endlich (Def. 4) sind.
 Jeder kompakte Unterraum eines Zellkomplexes schneidet nur endlich viele Zellen.

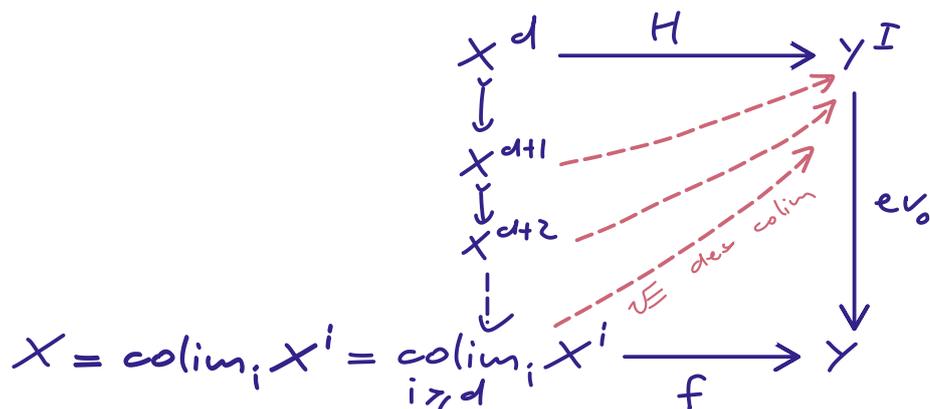
Beweis:

a (ausgehend von Def. A):

$X^{d-1} \rightarrow X^d$ ist Kofaserung wegen Stabilität von Kofaserungen unter Summen und Pushouts.



$X^d \rightarrow X$ ist Kofaserung: Prüfe HEE



b: ausgehend von A oder B:

siehe [Hatcher, Appendix, Prop. A3].

c: ausgehend von B:

(endlich \Rightarrow kompakt) X ist Quotient $\coprod_{d=1, \dots, n} \coprod_{\text{endlich}} D^d$
Kompakt

(endlich \Leftarrow kompakt) folgt aus allgemeineren zweiter Aussage

(zweite Aussage) Argumentiere ähnlich wie in Lemma 7.13.

Sei $K \subseteq X$ kompakt.

Wähle für jede offene Zelle X_i^d , die K schneidet, einen Punkt $s_i^d \in X_i^d \cap K$. Sei $S := \{s_i^d\}_{i,d}$

S ist abgeschlossen in X :

Wegen B(2) enthält $S \cap \overline{X_i^d}$ nur endlich viele Punkte (nämlich s_i^d und höchstens einen Punkt für jede der endlich vielen Zellen, die der Rand von $\overline{X_i^d}$ schneidet).

Also ist S abgeschlossen (X hausdorfsch).

Genauso ist jede Teilmenge von S abgeschlossen.

Also ist S diskret.

Andererseits ist S kompakt, da abgeschlossen in K . Also ist S endlich.

Also schneidet K nur endlich viele Zellen. \square

6. Satz: Definitionen A & B von Zellkomplex sind äquivalent.

Beweisskizze:

(A \Rightarrow B) Definiere $j_i: D^d \rightarrow X$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{d-1} & \longrightarrow & D^d & & \\
 \downarrow j_i & & \downarrow & \searrow j_i & \\
 X^{d-1} & \longrightarrow & X^d & \hookrightarrow & X
 \end{array}$$

Def. $X^d := \bigcup_{i \in I_d} j_i(D^d)$

1: Injektivität $j_i|_{D^d}$ folgt aus expliziter Konstruktion von X^d als Pushout.

3: Sowohl in Def. A als auch in Def. B ist die Topologie die Quotiententopologie bzgl.

$$\coprod_{d \geq 0} \coprod_{i \in I_d} D^d \longrightarrow X$$

2: Nach Konstruktion ist $j_i(\partial D^d) \subseteq X^{d-1}$, d.h., $j_i(\partial D^d)$ ist in Vereinigung von offenen Zellen kleinerer Dimension enthalten.

N.z.z: enthalten in Vereinigung von endlich vielen Argumentiere induktiv, dass X^{d-1} bereits Zellkomplex im Sinne von Def. B ist. Da ∂D^d kompakt ist, schneidet $j_i(\partial D^d)$ nach Satz 5 (c) nur endlich viele Zellen von X^{d-1} .

(A \Leftarrow B): Setze $X^d := \bigcup_{e \leq d} \bigcup_{i \in I^e} X_i^e$.

Prüfe \mathcal{U}_E von Pushouts & Kolimes.

\mathcal{U}_E in Sets leicht zu sehen, also

nur Topologie zu prüfen. □

7. Satz (Konstruktionen mit Zellkomplexen)

② Ist $A \subseteq X$ Unterkomplex, so hat (X, A) die Struktur eines relativen Zellkomplexes.

① Für jeden relativen Zellkomplex (X, A) lässt sich X/A als Zellkomplex auffassen mit

$$\left(\frac{X}{A}\right)^d = \frac{X^d}{A}.$$

③ Sind X_i Zellkomplexe mit Basispunkten $x_i \in (X_i)^0$, so ist $\bigvee_i (X_i, x_i)$ ein Zellkomplex, der jedes X_i als Unterkomplex enthält.

④ Ist $A \subseteq X$ Unterkomplex, Y weiterer Zellkomplex und $f: A \rightarrow Y$ zellulär, so ist das Pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \cup_A Y \end{array}$$

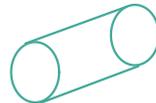
ein Zellkomplex. Er enthält Y als Unterkomplex und zusätzlich eine Zelle für jede Zelle von X , die nicht in A liegt.

⑤ Ist $X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 \hookrightarrow \dots$ eine Sequenz von Inklusionen von Unterkomplexen, so ist $\operatorname{colim}_i X_i$ ein Zellkomplex, der jedes X_i als Unterkomplex enthält.

⊗ Das Produkt zweier Zellkomplexe $X + Y$
 (in unserer Kategorie Top)
 ist ein Zellkomplex. Er enthält eine d -Zelle
 für jedes Paar aus einer p -Zelle von X
 und einer q -Zelle von Y mit $p+q=d$.

Beweisskizze zu \otimes :

Für jede Zerlegung $d=p+q$ ist
 $(D^d, S^{d-1}) \cong (D^p \times D^q, D^p \times S^{q-1} \cup S^{p-1} \times D^q)$



$$(D^3, S^2) \cong (I^2 \times I, \partial \dots) \cong (D^2 \times D^1, D^2 \times S^0 \cup S^1 \times D^1)$$

Benutze also als d -Zellen von $X+Y$ die
 Zellen $X_i^p \times Y_j^q$ mit $p+q=d$.

Für ∞ Zellkomplexe ist wichtig, dass wir mit
 dem k -Produkt (= Produkt in unserer Kat. Top)
 arbeiten. Wollen, dass das Produkt der
 Identifizierungen

$$\begin{array}{c} \coprod_{d \geq 0} \coprod_{\mathbb{Z}^d} D^d \longrightarrow X \\ \coprod_{d \geq 0} \coprod_{\mathbb{Z}^d} D^d \longrightarrow Y \end{array}$$

wieder Identifizierung ist. Aber ∞ -Zellkomplexe
 X, Y sind i.A. nicht lokal kompakt, vgl.

Beispiel 8.13.



□

8. Beispiel:

Gebe I Zellstruktur \longleftarrow $\begin{matrix} 2 & 0\text{-Zellen} \\ 1 & 1\text{-Zelle} \end{matrix}$

Ist X Zellkomplex, so ist auch

$X \times I$ Zellkomplex.

Er enthält $X \times \partial I = X \amalg X$ als Unterkomplex und zusätzlich eine d -Zelle für jede $(d-1)$ -Zelle von X .

9. Def.: Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abb. ist eine Homotopie $X \times I \rightarrow Y$, die selbst zellulär ist bzgl. der Zellstruktur auf $X \times I$ aus Beispiel 8.

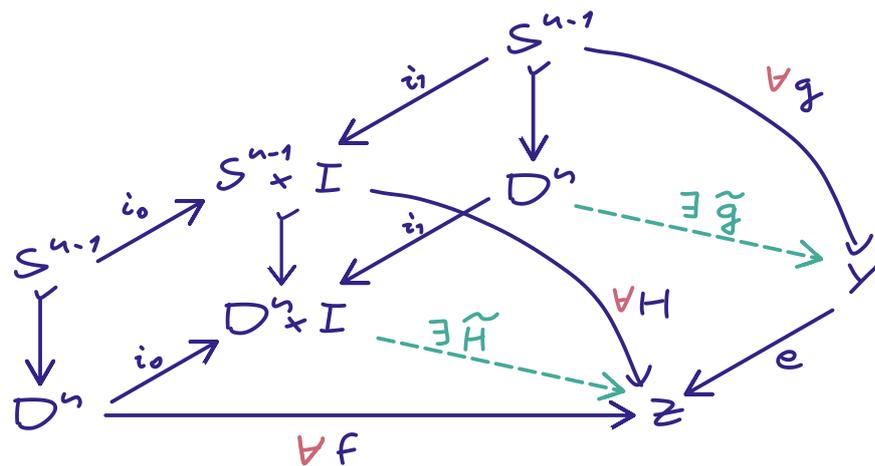
HELP — homotopy extension & lifting property

10. Lemma (HELP für (D^n, S^{n-1}))

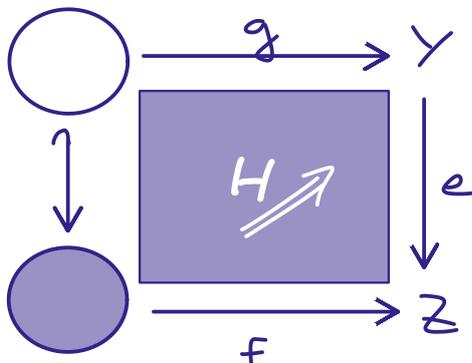
Die folgenden Bedingungen an eine Abb. $e: Y \rightarrow Z$ sind äquivalent:

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{array}{l} \pi_{n-1}(Y, y) \longrightarrow \pi_{n-1}(Z, ey) \text{ injektiv} \\ \pi_n(Y, y) \longrightarrow \pi_n(Z, ey) \text{ surjektiv} \end{array} \right\} \forall y \in Y.$$

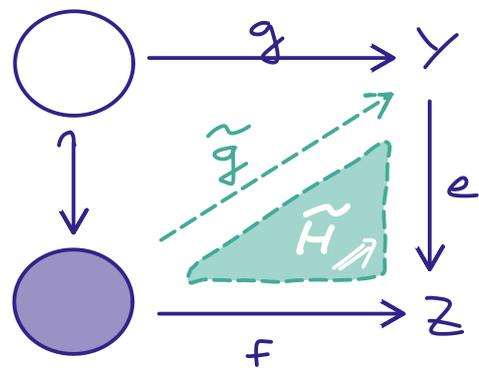
$\textcircled{2}$ Jedes kommutative Diagramm aus den folgenden durchgezogenen Linien lässt sich zu einem kommutativen Diagramm mit den gestrichelten Morphismen ergänzen:



Ausgangslage:



Ziel:



$\textcircled{3}$ Aussage $\textcircled{2}$ gilt zumindest dann, wenn H eine konstante Homotopie ist (wenn also insbesondere $f|_{S^{n-1}} = e \circ g$).

Beweis: (2 \Rightarrow 3) klar.

(3 \Rightarrow 1)

Injektivität: Sei $[g] \in \pi_{n-1}(Y, y)$ geg. mit $e_*[g] = 0$,
also $e \circ g \simeq \text{konst.}$ in Top. Fasse Homotopie
auf als Abb.

$$f: \underbrace{C \cdot S^{n-1}}_{\cong D^n} \longrightarrow Z$$

Setze dieses f und g in Diagramm ein,
und wähle für H konstante Homotopie.

Aus der Abb. \tilde{g} erhalten wir Homotopie
 $g \simeq \text{konst.}$, also $[g] = 0$ in $\pi_{n-1}(Y, y)$.

Surjektivität:

Sei $[f] \in \pi_n(Z, e_Z) = [(D^n, S^{n-1}), (Z, e_Z)]$

Wähle $g = \text{konst. } y$

$H = \text{konstante Homotopie}$

Aus (3) erhalten wir

$[\tilde{g}] \in \pi_n(Y, y) = [(D^n, S^{n-1}), (Y, y)]$

mit $e \circ \tilde{g} \simeq f$ (Homotopie von Paaren).

Also ist $e_*[g] = [f]$.

(1 \Rightarrow 2) - Skizze

Sei $* \in S^{n-1}$ ein Basispunkt, $x_1 := g(*)$

$z_1 := e(x_1)$

Fasse wieder D^n auf als $D^n = C S^{n-1}$.

Nehme vereinfachend an:

H punktierte Homotopie ($H_t(*) = z_1$)

f punktierte Homotopie von $f|_{S^{n-1}}$

zu konst. z_1 ($f(*, t) = z_1 \forall t$)

Betrachte lange exakte Sequenz zu e
aus Satz 7.4:

$$\begin{array}{c} \pi_n(F.e) \longrightarrow \pi_n(Y, Y_1) \xrightarrow{ex} \pi_n(Z, z_1) \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \longleftarrow \pi_{n-1}(F.e) \xrightarrow{\circ} \pi_{n-1}(Y, Y_1) \xrightarrow{ex} \pi_{n-1}(Z, z_1) \end{array}$$

Aus Annahmen (1) folgt: $\pi_{n-1}(F.e) = 0$. (+)

Betrachte

$$K_0: S^{n-1} \longrightarrow F.e = \left\{ (\zeta, \gamma) \in Z^I \times Y \mid \begin{array}{l} \zeta(0) = e\gamma, \\ \zeta(1) = z_1 \end{array} \right\}$$

$$x \longmapsto \left(t \mapsto \begin{cases} H_{1-2t}(x) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(x, 2t-1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \tilde{g}(x) \right)$$

(Prüfe: $H_{1-0}(x) = e\tilde{g}(x)$ ✓)

$H_{1-1}(x) = f(x, 1-1)$, also $H_0(x) = f(x, 0)$ ✓

$f(x, 2-1) = z_1$ ✓

für $x \in S^{n-1}$

Wegen (+) existiert eine Homotopie

$$K: S^{n-1} \times I \longrightarrow F.e$$

mit Anfang K_0 und Ende $K_1 = \text{Konst. Abb. } (c_{z_1}, \gamma_1)$.

Schreibe

$$K(x, t) = (\zeta(x, t), \tilde{g}(x, t)).$$

Dann definiert \tilde{g} die gesuchte Abb. $CS^{n-1} \rightarrow Y$.

Aus S lässt sich \tilde{H} konstruieren [...].

□

11. Satz (HELP-Lemma)

Sei (X, A) ein relativer Zellkomplex, und sei

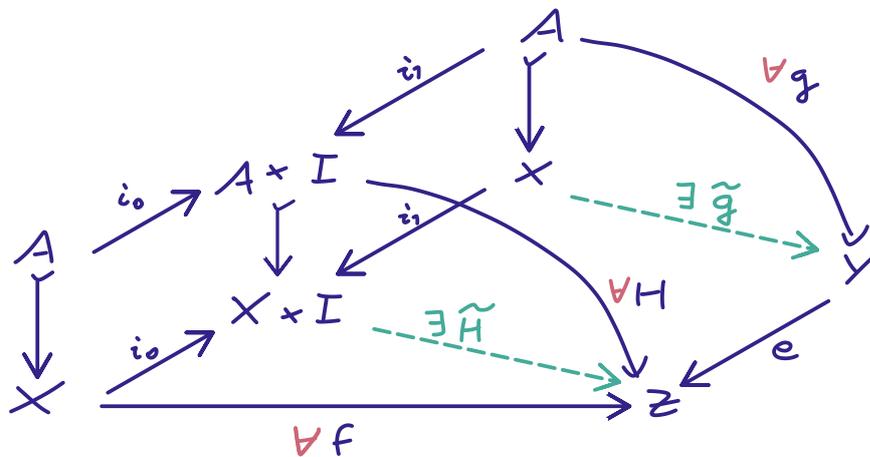


eine n -Äquivalenz (Def. 7.19)

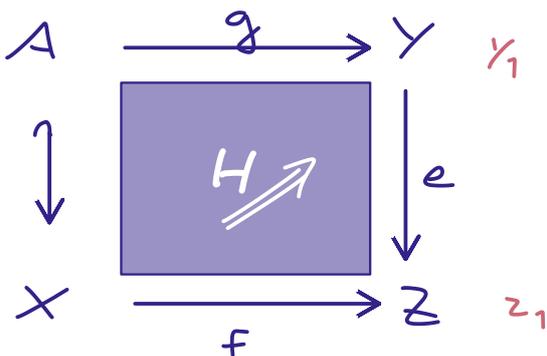
mit $n \geq \dim X$ ($\dim X = \infty$ erlaubt).

! Achtung. Definition enthielt verkehrte Ungleichung! (Ist jetzt korrigiert.)

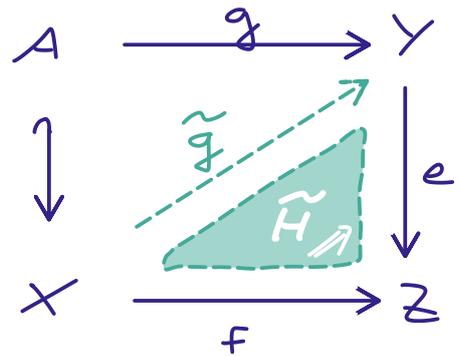
Dann lassen sich in jedem Diagramm, das aus folgenden \rightarrow -Pfeilen besteht, die \dashrightarrow -Pfeile kommutativ ergänzen:



Angangslage:



Ziel:



Beweisskizze: Induktion über Skelette

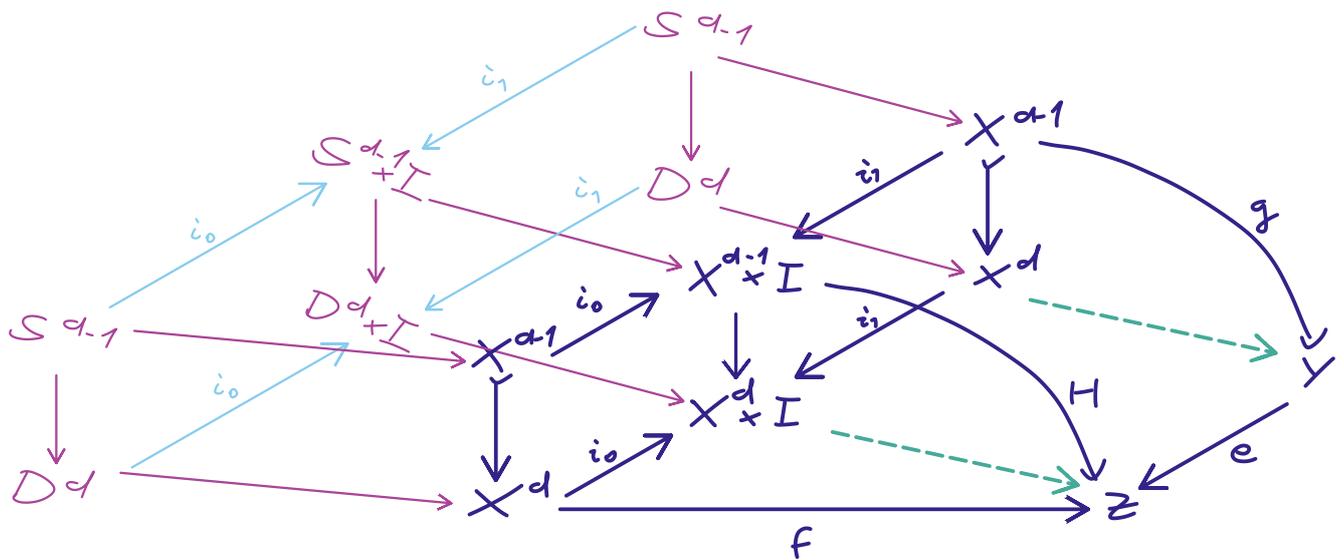
IA: $X^{-1} = A$: Wähle $\tilde{H} := H$, $\tilde{g} := g$.

IS: Angenommen, wir haben \tilde{g} & \tilde{H} bereits auf X^{d-1} fortgesetzt. Falls $d > \dim X$ sind wir fertig. Also $\underline{\exists} d \leq \dim X$ (s.u.).

Nehme zunächst an, dass X^d aus X^{d-1} durch Anheften einer einzigen d -Zelle hervorgeht.

$$\begin{array}{ccc}
 S^{d-1} & \xrightarrow{\quad} & X^{d-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D^d & \xrightarrow{\quad} & X^d
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 S^{d-1} \times I & \xrightarrow{\quad} & X^{d-1} \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D^d \times I & \xrightarrow{\quad} & X^d \times I
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \text{wieder Pushout} \\ \text{denn } I \times - \text{ ist} \\ \text{(Inkohärenz)} \\ \text{(LAPC)} \end{array} \right\}$$

Betrachte:



Da e n -Äquivalenz und $d \leq n$ folgt insbesondere:
 e_* surjektiv auf π_d und injektiv auf π_{d-1} .

Aus Lemma 10 (1 \Rightarrow 2) erhalten wir daher Fortsetzungen
von H auf $D^d \times I$ und von g auf D^d .

Aus \mathcal{U} der Pushouts erhalten wir kompatible
Fortsetzungen von H auf $X^d \times I$ und von g
auf X^d .

Bei endlich vielen (oder abzählbar vielen) Zellen
führe Induktion über Anzahl der Zellen.

Im allgemeine Fall argumentiere mit Zornschem
Lemma. [...] □

12 Korollar:

Ist $e: Y \rightarrow Z$ n -Äquivalenz, so ist für jeden Zellkomplex X der Dimension

$\dim X = n: e_*: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ surjektiv

$\dim X < n: e_*: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ bijektiv.

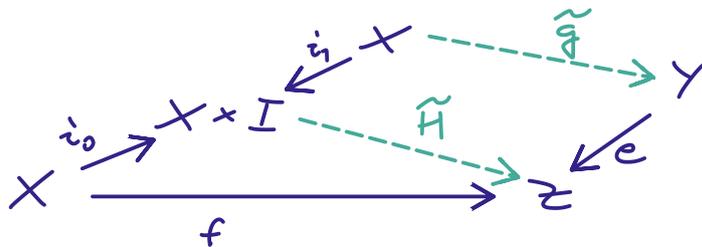
Ist e schwache Äquivalenz, so ist

$e_*: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ bijektiv

für beliebige Zellkomplexe X .

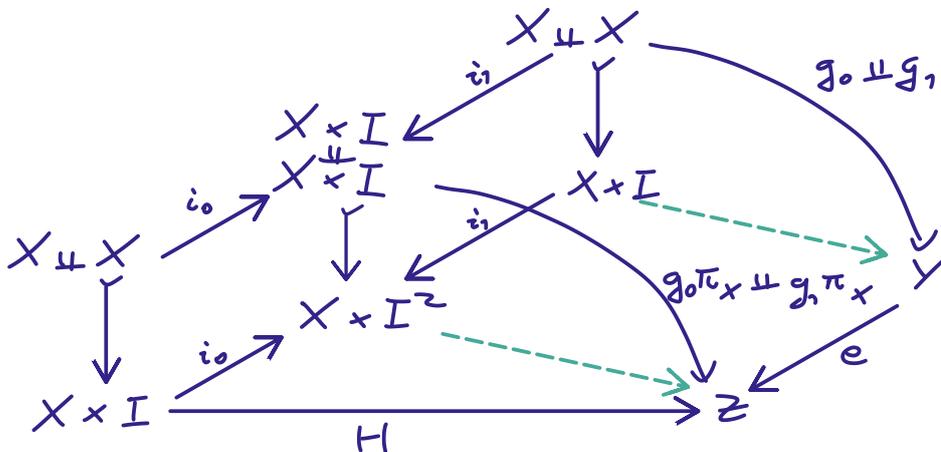
Beweis:

HELP für (X, \emptyset) zeigt Surjektivität:



HELP für $(X \times I, X \times \partial I)$ zeigt Injektivität für $\dim(X \times I) = \dim X + 1 \leq n$

Seien $g_0: X \rightarrow Y$ und $g_1: X \rightarrow Y$ gegeben mit $e_*[g_0] = e_*[g_1]$, also $e \circ g_0 \simeq e \circ g_1$ über eine Homotopie H .



Der obere \dashrightarrow liefert Homotopie $g_0 \simeq g_1$

also $[g_0] = [g_1]$ in $[X, Y]$.



13. Satz von Whitehead

Jede schwache Äquivalenz zwischen Zellkomplexen ist eine Homotopieäquivalenz.

Jede n -Äquivalenz zwischen Zellkomplexen der Dimension $< n$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Anwendungsbeispiel:

$$S^\infty \simeq * \quad (\text{denn } S^\infty \rightarrow * \text{ ist schwache Äquivalenz})$$

Beweis des Satzes:

Sei $e: Y \rightarrow Z$ eine n -Äquivalenz zwischen Zellkomplexen der Dimension $< n$.

Korollar 12 zeigt: $e_*: [Z, Y] \xrightarrow{\cong} [Z, *] \quad (1)$

$$e_*: [Y, Y] \xrightarrow{\cong} [Y, Z] \quad (2)$$

Da (1) surjektiv, $\exists f: Z \rightarrow Y$ mit $e \circ f \simeq \text{id}_Z$.

Daher $e \circ f \circ e \simeq e$

Da (2) injektiv, folgt: $f \circ e \simeq \text{id}_Y$

Das zeigt: f ist Homotopieinverses zu e .

Für schwache Äquivalenzen analog. □

Bemerkung:

Einschränkung „Dimension $< n$ “ ist notwendig.

Z.B.:

$$\left. \begin{array}{l} S^1 \rightarrow * \\ S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \end{array} \right\} \text{ sind 1-Äquivalenzen, aber keine Homotopieäq.}$$

Zelluläre Approximierung von Abb.

14. Def.: Ein Paar (X, A) ist n -zusammenhängend, falls $A \hookrightarrow X$ eine n -Äquivalenz ist.

Ein Raum X ist n -zusammenhängend, falls (X, x) n -zusammenhängend ist $\forall x \in X$, falls also

$$\pi_q(X, x) = 0 \quad \forall q \in \{0, \dots, n\}.$$

Wir brauchen die folgende Verallgemeinerung von Satz 7.10 – $\pi_q(S^{n+1}) = 0 \quad \forall q \leq n$:

15. Satz:

Ein zusammenhängender Zellkomplex, der nur 0-Zellen und Zellen der Dimension $> n$ besitzt, ist n -zusammenhängend.

Ein relativer Zellkomplex, der nur Zellen der Dimension $> n$ besitzt, ist n -zusammenhängend.

Beweisidee:

Wie Satz 7.10 selbst können wir dies nicht mit den Methoden der Vorlesung beweisen (brauchen stückweise lineare oder glatte Approximierung von Abb.), siehe z.B. [Hatcher, Thm 4.8]. \square

16. Satz: Jede Abb. zwischen Zellkomplexen ist homotop zu einer zellulären Abb.

Ferner gilt:

(a) Ist die Einschränkung einer Abb. $X \xrightarrow{f} Y$ zwischen Zellkomplexen auf einen Unterkomplex $X' \subseteq X$ bereits zellulär, so ist f unter X' homotop zu einer zellulären Abb.

(b) Homotope zelluläre Abb. sind homotop über eine zelluläre Homotopie.

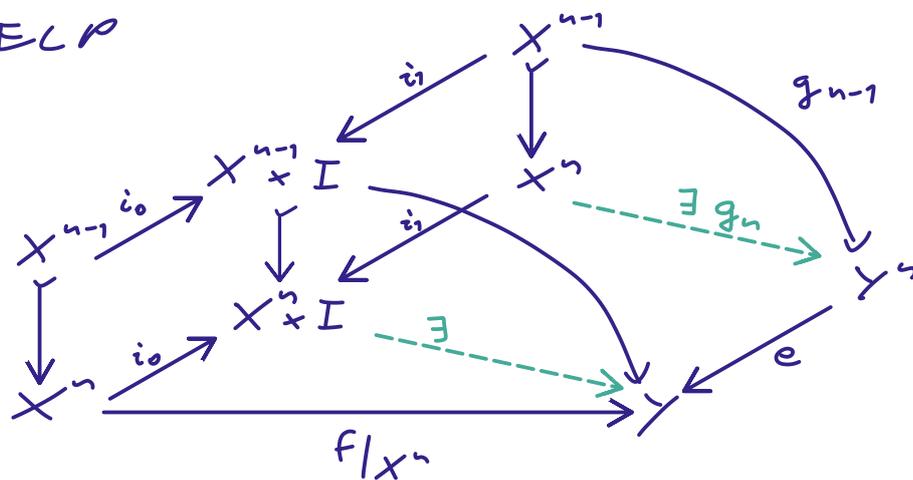
Beweis:

Sei $f: X \rightarrow Y$ Abb. zwischen Zellkomplexen.

Induktion über Skelette

IV: $f|_{X^{n-1}} \simeq g_{n-1}$, wobei $g_{n-1}: X^{n-1} \rightarrow Y$ zelluläre Abb.

IS: HELP



Nach Satz 15 ist e eine n -Äquivalenz.

Wir erhalten also zelluläre Abb. $g_n: X^n \rightarrow Y$, die homotop ist zu $f|_{X^n}$.

a: analog (Übung)

b: Wende (a) an auf $X + I$ und Unterkomplex $X' := X + \partial I$. □

Zelluläre Approximierung von Räumen

17. Def.: Eine zelluläre Approximierung eines Raumes X ist eine schwache Äquivalenz

$$\Gamma X \xrightarrow{\gamma} X,$$

wobei ΓX ein Zellkomplex ist.

18. Satz: Jeder Raum besitzt eine zelluläre Approximierung.

Beweis:

Sei X gegeben. $\in X$ wegzusammenhängend

(betrachte sonst \mathbb{I} der Approx. aller Wegzusammenhangst.).

Wähle Basispunkt $x_0 \in X$ und konstruiere Zellkomplexe

$$* \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \dots$$

\swarrow kann bereits Zellen in beliebigen Dimensionen haben

mit $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ Unterkomplex \hookrightarrow , und Abbildungen

$f_n: X_n \longrightarrow X$ mit $f_n|_{X_{n-1}} = f_{n-1}$, für die gilt:

$$(f_n)_*: \pi_q(X_n) \longrightarrow \pi_q(X) \quad \forall q \geq 0$$

$$\forall n \geq 1$$

$$(f_n)_*: \pi_q(X_n) \xrightarrow{\cong} \pi_q(X) \quad \forall q < n$$

Dann wird $\Gamma X := \operatorname{colim}_n X_n$ mit $f := \operatorname{colim} f_n$

eine zelluläre Approx. von X sein (siehe Satz 7.12).

IA: Wähle Erzeuger $f_j: S^q \longrightarrow X$ von $\pi_q(X)$, $\forall q$.

$$X_n := \bigvee_{q \geq 1} \left(\bigvee_j S^q \right)$$

\uparrow gewählte Erzeuger von $\pi_q(X)$

Zellstruktur: eine 0-Zelle, eine q -Zelle pro Erzeuger von $\pi_q(X)$.

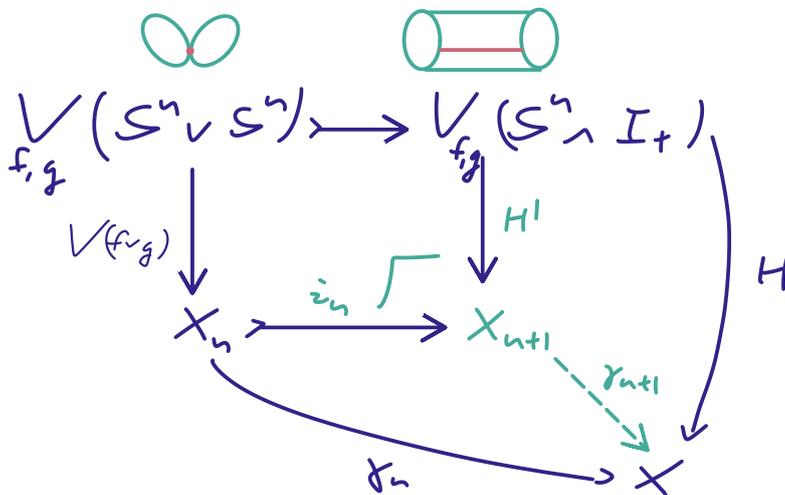
$f_n: X_n \longrightarrow X$ sei auf j -tem Summanden von X_n durch j definiert.

$$(f_n)_*: \pi_q(X_n) \longrightarrow \pi_q(X)$$

$$[S^q \hookrightarrow X_n] \longmapsto [S^q \xrightarrow{j} X]$$


IS: Seien $f_n: X_n \longrightarrow X$ bereits konstruiert.

Def. X_{n+1} und f_{n+1} wie folgt:



Summiert wird über alle Paare

$$[f] \neq [g] \in \pi_n(X_n)$$

mit $(f_n)_* [f] = (f_n)_* [g]$ in $\pi_n(X)$

Für jedes solche Paar \exists Homotopie $H_{f,g}: f_n \circ f \rightsquigarrow f_n \circ g$, die wir als Abb. $S^n \times I_+ \longrightarrow X$ auffassen können.

$\subseteq f, g$ zellulär (Satz 16), sodass auch $V(f_{f,g})$ zellulär ist und somit X_{n+1} ein Zellkomplex (Satz 7 \ominus).

- $(f_{n+1})_*$ surjektiv auf allen π_q : folgt aus Surjektivität von $(f_n)_*$ und $f_n = f_{n+1} \circ z_n$.

- $(j_{n+1})_*$ injektiv auf π_q , $\forall q \leq n$.
 $S^n \cap I_+$ geht aus $S^n \setminus S^n$ durch Anheften einer $(n+1)$ -Zelle hervor. Also geht X_{n+1} aus X_n ebenfalls durch Anheften von $(n+1)$ -Zellen hervor.

Daher gilt nach Satz 15:

(X_{n+1}, X_n) ist n -zusammenhängend.

$q = n$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X_n) & \xrightarrow{(i_n)_*} & \pi_n(X_{n+1}) \\ & \searrow (j_n)_* & \downarrow (j_{n+1})_* \\ & & \pi_n(X) \end{array}$$

Seien $[f], [g] \in \pi_n(X_{n+1})$ mit $(j_{n+1})_*[f] = (j_{n+1})_*[g]$.

Wegen Surj. von $(i_n)_*$ $\exists [\hat{f}], [\hat{g}] \in \pi_n(X_n)$

mit $(i_n)_*[\hat{f}] = [f]$, $(i_n)_*[\hat{g}] = [g]$.

Falls $[\hat{f}] = [\hat{g}]$, folgt $[f] = [g]$ — fertig.

Falls $[\hat{f}] \neq [\hat{g}]$, folgt aus Konstruktion von X_{n+1} :

$$i_n \circ \hat{f} \simeq i_n \circ \hat{g} \quad (\text{via einen Summanden von } H^1)$$

Also ist $[f] = (i_n)_*[\hat{f}] = i_*[\hat{g}] = [g]$ in $\pi_n(X_{n+1})$.

$q < n$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(X_n) & \xrightarrow[\cong]{(i_n)_*} & \pi_q(X_{n+1}) \\ & \searrow (j_n)_* & \downarrow (j_{n+1})_* \\ & & \pi_q(X) \end{array}$$

\swarrow n -Äquivalenz
 \uparrow \cong
 bij. nach Annahme

Es folgt: $(j_{n+1})_*$ bij.

□

Ergänzung I: Approximierung von Paaren

Für beliebige Paare gilt offenbar:

$$\left. \begin{array}{l} (X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \\ \text{Homotopieäquivalenz} \\ \text{von Paaren} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \text{ Homotopieäq.} \\ \text{und} \\ A \xrightarrow{f|_A} B \text{ Homotopieäq.} \end{array} \right.$$

Ein Zellpaar (X, A) ist ein Zellkomplex X mit einem Unterkomplex A . Für Zellpaare (X, A) und (Y, B) gilt nach Satz 4.17 und 8.5(a):

$$\left. \begin{array}{l} (X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \\ \text{Homotopieäquivalenz} \\ \text{von Paaren} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \text{ Homotopieäq.} \\ \text{und} \\ A \xrightarrow{f|_A} B \text{ Homotopieäq.} \end{array} \right.$$

19. Def.: Eine Abb. von Paaren

$$\left. \begin{array}{l} (X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \\ \text{ist eine schwache} \\ \text{'Äquivalenz von Paaren} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \text{ schwache Äq.} \\ \text{und} \\ A \xrightarrow{f|_A} B \text{ schwache Äq.} \end{array} \right.$$

Wir betrachten im Folgenden:

$\text{Ho Top}^{\text{Top}}$ Räume + [stetige] Abb.
... modulo Homotopie

$\text{Ho Top}^{\text{Top}^2}$: Paare + Abb. von Paaren
... modulo Homotopie von Paaren

CW : Zellkomplexe (mit gewählter Zellstruktur)
+ zelluläre Abb.
 Ho CW : ... modulo (zelluläre) Homotopie

↑ macht keinen Unterschied:
siehe Satz 16(b)

$\text{Ho CW}^{\text{CW}^2}$: Zellpaare (u.o.) + zelluläre Abb.
... modulo Homotopie von Paaren

Sei $U: CW \longrightarrow Top$
 bzw. $U: Ho CW \longrightarrow Ho Top$ der Funktor, der die Zellstruktur vergisst.

Satz 20: \exists Funktor

$$Ho Top \xrightarrow{\Gamma} Ho CW$$

und eine natürliche Transformation $\gamma: U\Gamma \rightsquigarrow Id$
 d.h., dass

$$\gamma_x: \Gamma X \longrightarrow X$$

eine zelluläre Approximierung ist.

Allgemeiner: \exists Funktor

$$Ho Top^2 \xrightarrow{\Gamma} Ho CW^2$$

und eine natürliche Transformation $\gamma: U\Gamma \rightsquigarrow Id$
 d.h., dass

$$\gamma_x: \Gamma(X, A) \longrightarrow (X, A)$$

eine schwache Äquivalenz von Paaren ist.

Ist (X, A) n -zusammenhängend, so kann $\Gamma(X, A) = (\Gamma X, \Gamma A)$
 mit $(\Gamma X)^n = (\Gamma A)^n \quad \forall q \leq n$.

Beweisidee:

Verfeinere Konstruktion im Beweis von Satz 18. \square

Ergänzung II:

21. Def.: Eine Triade $(X; A, B)$ ist ein Raum X mit zwei Unterräumen A, B .

Eine **schnittige Triade** ist eine Triade $(X; A, B)$ mit $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Eine **Zelltriade** $(X; A, B)$ ist ein Zellkomplex X mit Unterkomplexen A, B , sodass $X = A \cup B$.

Eine Abb. von Triaden $f: (X; A, B) \rightarrow (X'; A', B')$ ist eine Abb. $X \xrightarrow{f} X'$ mit $f(A) \subseteq A'$ und $f(B) \subseteq B'$.



Zelltriaden sind i.A. nicht schnittig! Aber:

22. Satz: Für jede schnittige Triade $(X; A, B)$ \exists Zelltriade $(\Gamma X; \Gamma A, \Gamma B)$ und eine Abb. von Triaden

$$(\Gamma X; \Gamma A, \Gamma B) \longrightarrow (X; A, B)$$

sodass

$$\Gamma X \longrightarrow X$$

$$\Gamma A \longrightarrow A$$

$$\Gamma B \longrightarrow B$$

$$\Gamma A \cap \Gamma B \longrightarrow A \cap B$$

zelluläre Approximierungen sind.

Beweisidee:

Verfeinere Konstruktion im Beweis von Satz 18. \square