10. Axiomatische & zelluläre Homologie

1. Def.: Eine (gewöhnliche) Homologietheorie auf

Räumen	Zellkomplexen

ist eine Familie von Funktoren

abelsche Gruppen

$$H_n : HoTop^2 \longrightarrow Ab \qquad\qquad H_n : HoCW^2 \longrightarrow Ab$$

$$\begin{array}{ccc} (X,A) & \longmapsto & H_n(X,A) \\ {\scriptstyle [f]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ (Y,B) & \longmapsto & H_n(Y,B) \\ (X,\emptyset) & \longmapsto & H_n(X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f|_A)_*} \\ H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

kommutiert

(für alle $n \in \mathbb{Z}$) zusammen mit natürlichen Trafos

$\partial_n : H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$, die den folgenden Axiomen genügen:

(DIMENSION) $\quad H_q(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$

(LES) Für jedes

Paar (X,A)	Zellpaar (X,A)

ist

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X,A) \to \cdots$$

exakt.

$i : A \hookrightarrow X$

$j : (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$

(AUSSCHNEIDUNG) Für jede

schnittige Triade	Zelltriade
$(X; A, B)$	$(X; A, B)$
$X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$	

induziert die Inklusion $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$

Isomorphismen $$H_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, B)$$

(ADDITIVITÄT) Die Inklusionen $(X_i, A_i) \xhookrightarrow{\iota_i} (\coprod_i X_i, \coprod A_i)$ induzieren Isomorphismen

$$\bigoplus_i H_n(X_i, A_i) \xrightarrow[\cong]{\oplus (\iota_i)_*} H_n\left(\coprod_i X_i, \coprod A_i\right)$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

Schwache Äquivalenzen $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ induzieren Isomorphismen $H_n(X, A) \xrightarrow[\cong]{} H_n(Y, B)$

(ergibt sich automatisch aus Satz von Whitehead (8.13))

Seien $\Gamma : \mathrm{Ho\,Top}^2 \longrightarrow \mathrm{Ho\,CW}^2$ (zelluläre Approxim.)

und $\mathrm{Ho\,Top}^2 \longleftarrow \mathrm{Ho\,CW}^2 : \mathcal{U}$ (Vergiss)

wie in Satz 8.20.

2. **Satz:** Jede Homologietheorie auf Räumen definiert durch Einschränkung (Komposition mit $\mathcal{U}$) eine Homologietheorie auf Zellkomplexen. Umgekehrt lässt sich jede Homologietheorie auf Zellkomplexen fortsetzen zu einer Homologietheorie auf Räumen, und diese Fortsetzung ist „eindeutig" (insbes. alle Funktoren H_n eindeutig bis auf natürliche Isomorphie).

Beweis:

(Räume ⇝ Zellkomplexe)

Nur (AUSSCHNEIDUNG) ist nicht offensichtlich; Axiom folgt aus Satz 8.22.

(Zellkomplexe ⇝ Räume)

Sei H_* Homologietheorie $\mathrm{Ho}\,\mathrm{CW}^2$.

Zeige, dass $H_* \circ \Gamma$ Homologietheorie auf $\mathrm{Ho}\,\mathrm{Top}^2$ definiert. Zum Beispiel:

(SCHWACHE ÄQUIV.)

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ schwache Äquiv. Dann ist

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \Gamma X \arrow[u, dotted, "\gamma_X"] \arrow[r, "\Gamma f"] & \Gamma Y \arrow[u, dotted, "\gamma_Y"'] \end{tikzcd}$$

Γf schwache Äquiv. zwischen Zellpaaren (denn f, γ_X und γ_Y sind schwache Äquivalenzen und $\gamma_Y \circ \Gamma f \simeq f \circ \gamma_X$).

Nach Satz von Whitehead (8.13) ist Γf also Homotopieäquivalenz, also

$$(\Gamma f)_* : H_n(\Gamma X) \longrightarrow H_n(\Gamma Y) \quad \text{Iso } \forall n.$$

Eindeutigkeit:

Sind H'_*, H''_* zwei Fortsetzungen von H_*, also

$$H'_* \circ \mathcal{U} = H''_* \circ \mathcal{U} = H_*,$$

so ist wegen der schwachen Äquivalenz

$$\gamma : \mathcal{U}\Gamma \rightsquigarrow \mathrm{Id}$$

$$H'_* \cong H'_* \circ \mathcal{U}\Gamma = H''_* \circ \mathcal{U}\Gamma \cong H''_*$$

AXIOM (SCW. ÄQ)
für H'_*, angewendet
auf γ

$\square$

Wir wollen nun eine konkrete Konstruktion für eine Homologietheorie auf Zellkomplexen sehen.

Zellulärer Kettenkomplex

Homotopiekategorie bezüglich Kettenhomotopie – Hom. Alg., Def. M4.8

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ho}\,\mathrm{CW} & \longrightarrow & \mathrm{Ho}\,\mathrm{Kom}_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{H_n} & \mathrm{Ab} \\ X & \longmapsto & (C_\bullet(X), d_\bullet) & \longmapsto & \dfrac{\ker(d \text{ auf } C_n)}{\operatorname{im}(d \text{ auf } C_{n+1})} \end{array}$$

$$\dots \xrightarrow{d} C_2 X \xrightarrow{d} C_1 X \xrightarrow{d} C_0 X \xrightarrow{d} \dots$$

$$d \circ d = 0$$

Für Definition von $d_\bullet$ werden wir

$$\begin{array}{ccccc} [S^n, S^n] & \xleftarrow[\text{Satz 7.18}]{\cong} & \pi_n(S^n) & \underset{\text{Kor. 9.2}}{\cong} & \mathbb{Z} \\ [\mathrm{id}] & \widehat{=} & [\mathrm{id}] & \widehat{=} & 1 \end{array} \qquad \text{für } n \geq 1$$

verwenden. (Beachte in Satz 7.18 für $n=1$, dass $\pi_1(S^1)$ trivial auf sich selbst operiert.)

3. Def.: Der **Abbildungsgrad** einer Abb. $f: S^n \longrightarrow S^n$ ist die Zahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, der $[f]$ unter obigem Isomorphismus entspricht.

4. Beispiele

(a) $\deg(\mathrm{id}) = 1$

(b) $\deg\left(\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \cap\!\! | & & \cap\!\! | \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}\right) = n$

(c) $\deg(f) = 0$ falls f nicht surjektiv.

(d) $\deg\left(\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{t} & S^n \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| \\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} & & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \\ (\underline{x},y) & \longmapsto & (\underline{x},-y) \end{array}\right) = -1$,

denn unter dem Homöomorphismus $S^n \cong \Sigma S^{n-1} = \dfrac{S^{n-1}\times I}{\cdots}$

entspricht t der Abb. $\begin{array}{ccc} \Sigma S^{n-1} & \longrightarrow & \Sigma S^{n-1} \\ \overline{(\underline{x},s)} & \longmapsto & \overline{(\underline{x},1-s)} \end{array}$,

also der Abb. $-[\mathrm{id}] \in [\Sigma S^{n-1}, \Sigma S^{n-1}]$

(vgl. Satz 6.5).

(e) $\deg\left(\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & S^n \\ \underline{x} & \longmapsto & -\underline{x} \end{array}\right) = (-1)^{n+1}$,

denn wir können Abb. schreiben als Komposition von $n+1$ einfachen Vorzeichenwechseln, und:

5. Notiz: $\deg(f\circ g) = \deg f \cdot \deg g$

Beweis: OE f, g punktiert

$f_*: \pi_n(S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n)$ ist laut Satz 6.5 Homomorphismus; da er $[\mathrm{id}]$ auf $[f]$ abbildet, ist er gegeben durch Multiplikation mit $\deg(f)$. Daher

$$\deg(f\circ g) = \deg(f_*[g]) = \deg(f)\cdot\deg(g).$$

$\square$

Sei nun X ein Zellkomplex. Dann ist

$$X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_{\substack{n\text{-Zellen}\\ \text{von } X}} D^n/S^{n-1} \cong \bigvee_{\substack{n\text{-Zellen}\\ \text{von } X}} S^n$$

Für jede n-Zelle $j:(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$ haben wir:

(a)
$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[rr, "\bar\partial_j"] \arrow[dr, "\partial_j"'] & & X^{n-1}/X^{n-2} \\
& X^{n-1} \arrow[ur, "\text{Quotientenabb.}"'] &
\end{tikzcd}$$

Anheft-abbildung ∂_j

(b)
$$D^n/S^{n-1} \xrightarrow{\bar j} X^n/X^{n-1}$$

(c)
$$\begin{tikzcd}
X^n/X^{n-1} \arrow[rr, "\pi_j"] \arrow[dr] & & D^n/S^{n-1} \\
& X^n/(X^n - j(\mathring{D}^n)) \arrow[ur, "\cong_j"'] &
\end{tikzcd}$$

$(\pi_j \circ \bar j = id)$

Wir fixieren im Folgenden einen Homöomorphismus

$$\nu: D^n/S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$$

z. B.: $\quad r\cdot\underline{x} \longmapsto (u\cdot\underline{x}, 1-2\cdot r)$ mit $u := \sqrt{1-(1-2r)^2}$

Wenn wir $S^n \xrightarrow{\bar j} X^n/X^{n-1}$ (b)

oder $X^n/X^{n-1} \xrightarrow{\pi_j} S^n$ (c)

schreiben, meinen wir $\bar j \circ \nu^{-1}$ bzw. $\nu \circ \pi_j$.

6. Def. & Satz

Der zelluläre Kettenkomplex $C_\bullet(X)$ eines Zellkomplexes X ist gegeben durch

$$C_n(X) := \bigoplus_{\substack{n\text{-Zellen}\\ \text{von } X}} \mathbb{Z}$$

mit folgendem Differential:

Schreibe $[x] \in C_0(X)$ für das Basiselement, das $x \in X^0$ entspricht,

$[j] \in C_n(X)$ für das Basiselement, das der n-Zelle $j : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$ entspricht.

$j : ([-1,1], \{\pm 1\}) \longrightarrow (X^1, X^0)$

$n=1$: $\quad d_1 : C_1(X) \longrightarrow C_0(X)$

$$[j] \longmapsto [j(1)] - [j(-1)]$$

$n>1$: $\quad d_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$

$$[j] \longmapsto \sum_{\substack{(n-1)\text{-Zellen}\\ k}} d_{jk}[k]$$

mit $d_{jk} := \deg\left(S^{n-1} \xrightarrow{\partial j} X^{n-1}/X^{n-2} \xrightarrow{\pi_k} S^{n-1}\right)$

Das ist ein Kettenkomplex (also $d \circ d = 0$).

Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine zelluläre Abb., so ist der durch f induzierte Kettenhomomorphismus gegeben durch

$$f_* : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y).$$

$$[j] \longmapsto \sum_{\substack{n\text{-Zellen}\\ k \text{ von } Y}} f_{jk}[k]$$

mit $f_{jk} := \deg\left(S^n \xrightarrow{j} X^n/X^{n-1} \xrightarrow{f} Y^n/Y^{n-1} \xrightarrow{\pi_k} S^n\right)$

Das ist ein Kettenhomomorphismus (also $df = fd$).

7. Def.: Die zellulären Homologiegruppen eines Zellkomplexes X sind gegeben durch

$$H_n(X) := H_n(C_\bullet(X), d) \in \mathrm{Ab}.$$

8. Beispiele

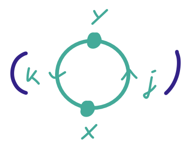
(Punkt)

$$\begin{array}{lcccc} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ C_\bullet(\text{Punkt}): & 0 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ H_*(\text{Punkt}): & 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z} \end{array}$$

(S^1)

$C_\bullet($  $)$: $\quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$

$H_*(\ldots)$: $\quad 0 \quad 0 \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}$

$C_\bullet($ 

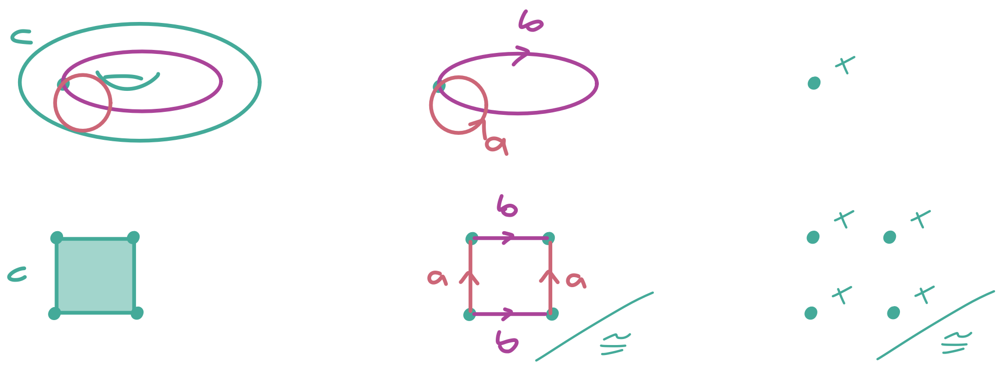
$)$: $\quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2$

$[j] \mapsto [y]-[x]$
$[k] \mapsto [x]-[y]$

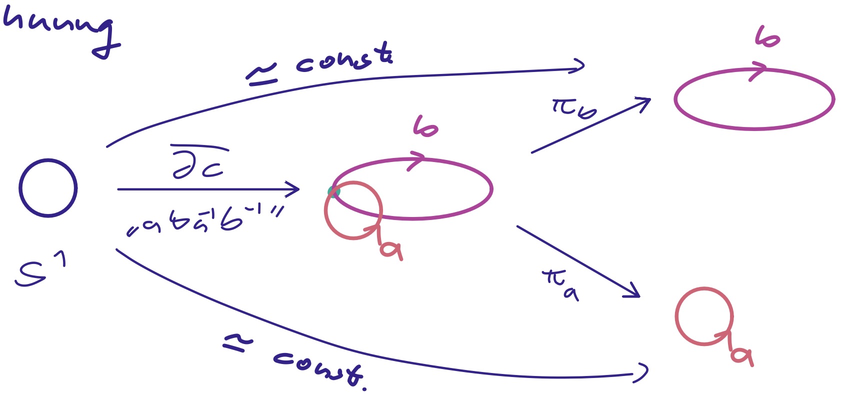
$H_*(\ldots)$: $\quad 0 \quad 0 \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}$

$(S^1 \times S^1)$

$$\begin{array}{ccc} X^2 & X^1 & X^0 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ S^1 \times S^1 & S^1 \vee S^1 & * \end{array}$$



Zur Berechnung von d_1:



$$C_\bullet(X) \qquad \overset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_2=0} \overset{1}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_1=0} \overset{0}{\mathbb{Z}}$$

$$[a] \longmapsto 0$$
$$[b] \longmapsto 0$$

Also

$$H_*(S^1 \times S^1): \qquad \overset{2}{\mathbb{Z}} \qquad \overset{1}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \qquad \overset{0}{\mathbb{Z}}$$

(S^n) Wähle Zellstruktur mit 1 n-Zelle & 1 0-Zelle.

$$C_\bullet(S^n) \qquad \overset{n}{\mathbb{Z}} \to 0 \to 0 \ \dots \ \to 0 \to \overset{0}{\mathbb{Z}}$$
$$H_*(S^n): \qquad \overset{n}{\mathbb{Z}} \quad 0 \quad 0 \ \dots \ 0 \quad \overset{0}{\mathbb{Z}}$$

(D^n) Wähle Zellstruktur mit
1 0-Zelle
1 $(n-1)$-Zelle $\Big\}\ S^{n-1}$
1 n-Zelle

$$C_\bullet(D^n): \qquad \overset{n}{\mathbb{Z}} \xrightarrow[d_n]{} \overset{n-1}{\mathbb{Z}} \to 0 \ \dots \ \to 0 \to \overset{0}{\mathbb{Z}}$$

$$d_n = \deg\Big(S^{n-1} \xrightarrow[\substack{\text{Anheft-}\\ \text{abb.}\\ =id}]{} S^{n-1} \xrightarrow[\substack{\pi\\ \shortparallel\\ id}]{} S^{n-1}\Big) = 1$$

$$H_*(D^n): \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \ \dots \ 0 \quad \overset{0}{\mathbb{Z}}$$

Also:
$$H_q(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q\neq 0. \end{cases} \qquad (n\geq 0)$$

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \text{ oder } q=n \\ 0 & q\neq 0 \end{cases} \qquad (n\geq 1)$$

$(\mathbb{R}P^n)$ Bereits gesehen: $\mathbb{R}P^n$ hat Zellstruktur mit einer q-Zelle in jedem Grad $0 \le q \le n$.

$$C_\bullet(\mathbb{R}P^n) \qquad \overset{n}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overset{n-1}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{1}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overset{0}{\mathbb{Z}}$$

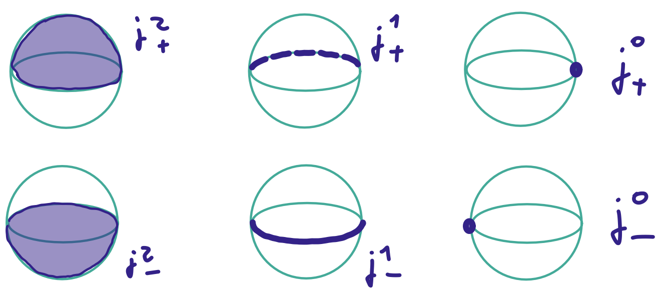
Idee: Benutze Berechnung von $C_\bullet(S^n)$, und die Abb. $p: S^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$, um Berechnung von $C_\bullet(\mathbb{R}P^n)$ zu erhalten.

Das funktioniert nicht mit obigen einfachen Zellstruktur auf S^n:

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet(S^n) \arrow[d, "p_*"'] & \overset{n}{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \overset{0}{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\
C_\bullet(\mathbb{R}P^n) & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} & \cdots \ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Wähle stattdessen Zellstruktur auf S^n mit 2 q-Zellen für alle $0 \le q \le n$. Charakteristische Abb.:

$$D^q \longrightarrow S^n$$
$$j_+^q: \quad \underline{x} \longmapsto \left(\underline{x}, \sqrt{1-|\underline{x}|^2}, \underline{0}\right)$$
$$j_-^q: \quad \underline{x} \longmapsto -\left(\underline{x}, \sqrt{1-|\underline{x}|^2}, \underline{0}\right)$$



Offenbar ist $p \circ j_+^q = p \circ q_-^q$, und durch

$$j^q := p \circ j_+^q$$

sind charakteristische Abb. einer Zellstruktur auf $\mathbb{R}P^n$ gegeben. Für diese Zellstrukturen erhalten wir:

$$p_*[j_\pm^q] = \deg\left(S^q \xrightarrow{\overline{j_\pm^q}} S^q/S^{q-1} \xrightarrow{\overline{p}} \mathbb{R}P^q/\mathbb{R}P^{q-1} \underset{\cong}{\xrightarrow{\pi_{j^q}}} S^q\right) \cdot [j^q]$$

$$= \deg(\mathrm{id}) \cdot [j^q] \qquad (\text{i.A. } \pi_j \circ \overline{j} = \mathrm{id})$$
$$= [j^q]$$

Somit:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
C_\bullet(S^n) & & \overset{n}{\mathbb{Z}^2} & \to & \mathbb{Z}^2 & \to & \cdots & \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 & \to & \overset{0}{\mathbb{Z}^2} \\
p_* \big\downarrow & = & \downarrow (1\ 1) & & \downarrow (1\ 1) & & \downarrow (1\ 1) & & & \downarrow (1\ 1) & & \downarrow (1\ 1) \\
C_\bullet(\mathbb{R}P^n) & & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \cdots & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}
\end{array}$$

d auf $C_\bullet(S^n)$:

$d[j_+^{q+1}]$:

$$\deg\left(S^q \xrightarrow{\overline{\partial j_+^{q+1}}} S^q/S^{q-1} \xrightarrow{\overline{\pi_{j_+^q}}} S^q\right) = ?$$

$$\deg\left(S^q \xrightarrow{\overline{\partial j_+^{q+1}}} S^q/S^{q-1} \xrightarrow{\overline{\pi_{j_-^q}}} S^q\right) = ?$$

Da ∂j_+^{q+1} die Identität ist, ist $\overline{\partial j_+^{q+1}}$ die Quotientenabb. Die beiden Kompositionen $\overline{\pi_{j_\pm^q}} \circ \overline{\partial j_+^{q+1}}$ sind Homotopieäquivalenzen — wir schlagen eine Hemisphäre zu einem Punkt zusammen, und die Hemisphären sind zusammenziehbar Umgebungsdeformationsretrakte.

Also haben sie Grad ± 1. Explizite Rechnung ergibt: $\deg(\pi_{j_+}^q \circ \overline{\partial_{j_+}^{q+1}}) = 1$.

Für $\pi_{j_-}^q \circ \overline{\partial_{j_+}^{q+1}}$ benutzen wir:

$$\begin{tikzcd}
S^q \arrow[r, "\partial_{j_+}^{q+1}"] \arrow[d, "a_1", "\cong"'] & S^q/S^{q-1} \arrow[r, "\pi_{j_+}^q"] & S^q \arrow[d, "a_q"', "\cong"] \\
S^q \arrow[r, "\partial_{j_+}^{q+1}"] & S^q/S^{q-1} \arrow[r, "\pi_{j_-}^q"] & S^q
\end{tikzcd}$$

$(\underline{x}, z) \mapsto (\underline{x}, -z)$ (links), $(\underline{x}, z) \mapsto (-\underline{x}, z)$ (rechts)

Explizite Rechnung zeigt, dass dieses Quadrat kommutiert. Daher

$$\deg(\pi_{j_-}^q \circ \partial_{j_+}^{q+1}) = \deg(a_q) \cdot \deg(\pi_{j_+}^q \circ \partial_{j_+}^{q+1}) \cdot \deg(a_1)$$
$$= (-1)^q \cdot 1 \cdot (-1)$$
$$= (-1)^{q+1}$$

Also $d[j_+^{q+1}] = [j_+^q] + (-1)^{q+1}[j_-^q]$.

$d[j_-^{q+1}]$:

$\overline{\partial_{j_-}^{q+1}}$ unterscheidet sich von $\overline{\partial_{j_+}^{q+1}}$ durch Komposition mit $S^q \longrightarrow S^q$, $\underline{x} \mapsto -\underline{x}$.

Daher:

$$d[j_-^{q+1}] = (-1)^{q+1}[j_+^q] + [j_-^q]$$

$$C_\bullet(S^n):\quad \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \quad \cdots \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}} \overset{2}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}} \overset{1}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}} \overset{0}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}$$

$$\Big(H_*(S^n):\quad \mathbb{Z} \quad 0 \ \cdots \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \quad \mathbb{Z} \ \checkmark\Big)$$

d auf $C_\bullet(\mathbb{R}P^n)$:

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet(S^n): \arrow[d, "p_*"'] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}"] & \overset{2}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(1\ 1)"] & \overset{1}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(1\ 1)"] & \overset{0}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \arrow[d, "(1\ 1)"] \\
C_\bullet(\mathbb{R}P^n): & \mathbb{Z} & \cdots \arrow[r, "\cdot 0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \underset{1}{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\cdot 0"] & \underset{0}{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten:

$$d[c_j^{q+1}] = (1 + (-1)^{q+1})\,[c_j^q]$$
$$= \begin{cases} 0 & q+1 \text{ ungerade} \\ 2 & q+1 \text{ gerade} \end{cases}$$

$$H_*(\mathbb{R}P^n): \qquad \cdots \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad 0 \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}$$

Falls n gerade:

$$C_\bullet(\mathbb{R}P^n): \quad \overset{n}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \overset{n-1}{\mathbb{Z}}$$
$$H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$$

Falls n ungerade:

$$C_\bullet(\mathbb{R}P^n): \quad \overset{n}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 0} \overset{n-1}{\mathbb{Z}}$$
$$H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$$

$$\boxed{H_q(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = n \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für } q \text{ ungerade mit } 0 < q < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

$(\mathbb{C}P^n)$ Wähle Zellstruktur mit einer q-Zelle in jeder Dimension $q \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$.

$$\begin{array}{lcccccccccccc} & \scriptstyle 2n & & & & & \scriptstyle 4 & & \scriptstyle 2 & & \scriptstyle 0 \\ C_\bullet(\mathbb{C}P^n): & \mathbb{Z} \to & 0 & \dots & \to 0 \to & & \mathbb{Z} \to & 0 \to & \mathbb{Z} \to & 0 \to & \mathbb{Z} \\ H_*(\mathbb{C}P^n): & \mathbb{Z} & 0 & \dots & 0 & & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} \end{array}$$